Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
11.12.2019

Variationsmethoden

9. Übungsblatt

Aufgabe 23 (Schwache Konvergenz)

(a) (i) Zeigen Sie das Lemma von Mazur:
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $x_n, x \in X$ mit $x_n \rightharpoonup x$ in X. Dann existieren $y_n \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots x_n\}$ mit $y_n \to x$ in X.
Hier: $\operatorname{conv} M$ sei die Menge aller Konvexkombinationen aus Elementen aus M.

(ii) Sei $x_n \coloneqq (\delta_{kn})_k$ (mit Kroneckerdelta δ_{kn}). Bestimmen Sie $x \in \ell^2$ mit $x_n \rightharpoonup x$ in ℓ^2 und geben Sie $y_n \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots x_n\}$ an, mit $y_n \to x$ in ℓ^2.

(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $D' \subset X'$ dicht. Zeigen Sie: $x_n \rightharpoonup x$ in X genau dann, wenn $\forall\, \varphi \in D'\colon\ \varphi(x_n) \to \varphi(x)$ und $\sup_n \|x_n\| < \infty$.
Korrektur: $\sup_n \|x_n\| < \infty$ bei "$\Leftarrow$" ergänzt.

(c) Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Innenproduktraum. Zeigen Sie: $x_n \to x$ genau dann, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Aufgabe 24 (Beispiele $\rightharpoonup 0$ aber $\nrightarrow 0$)
Sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $p \in (1, \infty)$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$f_n(x) \coloneqq n^{\frac{N}{p}} \rho(n\, x), \qquad g_n(x) \coloneqq n^{-\frac{N}{p}} \rho(\frac{1}{n} x)$$

Zeigen Sie: $\|f_n\|_p = \|g_n\|_p = \|\rho\|_p$ und $f_n, g_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Aufgabe 25 (geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach)
Korrektur: "stetig" in Definition von E_α ergänzt.
Seien $X_1 = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $X_2 = (L^2([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Definiere $E_\alpha \coloneqq \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \mid f(0) = \alpha\}$, E_β analog. Sei $g \in E_\beta$ fest.

(a) Zeigen Sie: Es existiert kein $\varphi \in X_2'$ so dass $\forall\, h \in E_\alpha\colon\ \varphi(h) < \varphi(g)$.

(b) Finden Sie $\varphi \in X_1'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ so dass $\forall\, h \in E_\alpha\colon\ \varphi(h) \le \gamma < \varphi(g)$.

(c) Warum ist Teil (*a*) kein Widerspruch zur geometrischen Version des Satzes von Hahn-Banach?