Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
19.12.2019

Variationsmethoden

10. Übungsblatt

Aufgabe 26 (Konvexität)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $L \in C^1(X, \mathbb{R})$ konvex.

(a) Zeige Sie: $\forall\, x, y \in X\colon \quad L(y) - L(x) \geq DL(x)[y - x]$.

(b) $x_0 \in X$ heißt kritischer Punkt von L, falls $DL(x_0) = 0$. Sei L strikt konvex, d.h. $\forall\, t \in (0,1), x, y \in X$ mit $x \neq y$: $L(tx + (1-t)y) < t\,L(x) + (1-t)L(y)$. Zeigen Sie: L hat höchstens einen kritischen Punkt.

(c) Geben Sie ein Beispiel für ein strikt konvexes Funktional ohne kritische Punkte.

Aufgabe 27 (Eindeutige Minimierer)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Definiere

$$L\colon H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla y|^2 - y\,v\,\mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie: L besitzt einen eindeutigen Minimierer.

Aufgabe 28 (Hölder-Stetigkeit)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := (a,b)$, $p \in (1, \infty)$ und $u \in W_0^{1,p}(I, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: $u \in C^{1/p'}(\overline{I}, \mathbb{R})$ und $u(a) = 0 = u(b)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Hinweis: Arzelà-Ascoli

Aufgabe 29 (nicht-Existenz eines Minimierers)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $p \in (1, \infty)$ falls $n \in \{1, 2\}$ bzw. $p \in (1, \frac{2n}{n-2})$ falls $n \geq 3$. Definiere

$$L\colon L^p(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \int_\Omega |y|^p\,\mathrm{d}x\,, \qquad M := \left\{ u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_\Omega |\nabla y|^2\,\mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie: L ist schwach stetig auf $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$, und koerziv auf $(M, \|\cdot\|_{H^1(\Omega,\mathbb{R})})$.

(b) Zeigen Sie: $\inf_M L = 0$ aber es existiert keine Minimierer von L auf M.

(c) Warum ist M nicht schwach abgeschlossen?