b) Beh: $\inf\limits_M L = 0$, aber es ex kein $y_0 \in M : L(y_0) = \inf\limits_M L$.

Ü 10 $\frac{4}{4}$!

Bew: Sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \rho \subseteq B_1(0)$, $\|\nabla\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig. Da Ω offen, ex $\delta \in (0,1)$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega$.

Für $\varepsilon \in (0,\delta)$ definiere $\rho_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$, $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \rho(\frac{1}{\varepsilon}\cdot(x-x_0))$. Dann:

$$\|\nabla\rho_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \left|\varepsilon^{-\frac{n}{p}}(\nabla\rho)(\tfrac{1}{\varepsilon}(x-x_0))\right|^p dx = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla\rho)(\tfrac{1}{\varepsilon}(x-x_0))|^p dx$$

$$\overset{y=\frac{1}{\varepsilon}(x-x_0)}{=} \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\rho(y)|^p \varepsilon^n dy = \|\nabla\rho\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$$

$\Rightarrow \rho_\varepsilon \in M$.

Weiter gilt:

$$L(\rho_\varepsilon) = \int_\Omega |\varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \rho(\tfrac{1}{\varepsilon}(x-x_0))|^p dx = \varepsilon^{p-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(\tfrac{1}{\varepsilon}(x-x_0))|^p dx$$

$$\overset{y=\frac{1}{\varepsilon}(x-x_0)}{=} \varepsilon^{p-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(y)|^p \varepsilon^n dx = \varepsilon^p \|\rho\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$$

$\Rightarrow \inf\limits_M L = 0$.

Annahme: $\exists y_0 \in M : L(y_0) = \inf\limits_M L$

Dann: $\|y_0\|^p_{L^p(\Omega)} = L(y_0) = \inf\limits_M L = 0 \quad \Rightarrow y_0 = 0$

Aber $\int_\Omega |\nabla y_0|^2 dx = 0 \quad \Rightarrow y_0 \notin M$ ↯.

c) Beh: M ist nicht schw. abg.

Bew: Betrachte ρ_ε wie in b): $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\delta)} \subseteq M$ ist beschränkt in $H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$. Da dieser Raum reflexiv ist, ex Folge $(\varepsilon_n)_n \subseteq (0,\delta)$, mit $\varepsilon_n \searrow 0$ und $\tilde\rho \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$ mit $\rho_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \tilde\rho$ in $H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$.

Wie in b): $\|\rho_{\varepsilon_n}\|^p_{L^p(\Omega)} = L(\rho_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d.h. $\rho_{\varepsilon_n} \to 0$ in $L^p(\Omega,\mathbb{R})$

Die Kompaktheit der Einbettung $H_0^1(\Omega,\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\Omega,\mathbb{R})$ liefert zusätzlich $\rho_{\varepsilon_n} \to \tilde\rho$ in $L^p(\Omega,\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \tilde\rho = 0 \notin M$. $\quad \Rightarrow$ Beh.

//