Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
08.01.2020

Variationsmethoden

11. Übungsblatt

Aufgabe 30 (Differenzierbarkeit)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $p \in (1, \infty)$. Ferner sei $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion, d.h.

(i) Für fast alle $x \in \Omega$ ist $s \mapsto f(x, s)$ stetig,

(ii) $\forall\, s \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto f(x, s)$ messbar.

Weiter sei $C > 0$ mit $|f(x, s)| \leq C\,(1 + |s|^{p-1})$ f.f.a $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Außerdem definieren wir $F(x, s) \coloneqq \int_0^s f(x, \xi)\,\mathrm{d}\xi$.
Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\tilde{f}\colon L^p(\Omega, \mathbb{R}) \to L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}),\ \tilde{f}(y)(x) \coloneqq f(x, y(x))$ ist stetig.

(b) Das Funktional $J\colon L^p(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ J\,[y] \coloneqq \int_\Omega F(x, y(x))\,\mathrm{d}x$ ist stetig Fréchet-differenzierbar und bestimmen Sie DJ.

Aufgabe 31 (Lösung $\neq 0$?)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $\lambda > 0$ fest. Betrachten Sie das Funktional

$$L\colon W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \lambda \cos(u)\,\mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $\exists\, u_\lambda \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})\colon\ L\,[u_\lambda] = \min L$.

(b) $\exists\, \lambda_* > 0\ \forall\, \lambda \in (0, \lambda_*)\colon\ u_\lambda \equiv 0$.

(c) $\exists\, \lambda^* > 0\ \forall\, \lambda \in (\lambda^*, \infty)\colon\ u_\lambda \not\equiv 0$.

(d) $L \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. Bestimmen Sie außerdem das Randwertproblem, welches u_λ löst.