Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
15.01.2020

# Variationsmethoden

## 12. Übungsblatt

**Aufgabe 32** (Maximierung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $p \in (1,\infty)$ falls $n \leq 2$ bzw. $p \in (1, \frac{2n}{n-2})$ falls $n \geq 3$. Betrachten Sie

$$L\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x\,, \qquad M := \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie: $L$ nimmt sein Maximum auf $M$ an.

**Aufgabe 33** (Subquadratische Nichtlinearitäten)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $p \in (1,2)$. Weiter sei $\mu > -\lambda_1(\Omega)$ wobei $\lambda_1(\Omega)$ der erste Laplace-Dirichlet-Eigenwert von $\Omega$ ist. Außerdem sei $f(x,s) := \partial_s F(x,s)$ eine Carathèodory-Funktion mit $|f(x,s)| \leq C\,(1+|s|^{p-1})$. Betrachten Sie

$$L\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + \mu |u|^2\right) + F(x,u)\,\mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie: $L$ nimmt sein Minimum an. Welches Randwertproblem löst ein Minimierer?

**Aufgabe 34** (Allgemeinere Randwertprobleme)
Betrachten Sie für $A\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Randwertprobleme

$$(1)\left\{\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + f(x,u) &= 0, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + f(x,u) &= 0, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}\right.$$

(a) Finden Sie geeignete Bedingungen an $A$ und $f$, sowie ein geeignetes Funktional $L\colon X \to \mathbb{R}$, so dass kritische Punkte von $L$ zu schwachen Lösungen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von (1) korrespondieren.

(b) Sei $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ so dass $\nabla\psi = \frac{1}{2}A(\cdot)^{-1}b(\cdot)$. Zeigen Sie durch die Transformation $u = \mathrm{e}^{\psi}w$, dass sich das Randwertproblem (2) auf ein Randwertproblem von der Form (1) transformieren lässt.
Finden Sie geeignete Bedingungen an $A$, $b$, $\psi$ und $f$, so dass das zugehörige Funktional wohldefiniert und Fréchet-differenzierbar ist.