Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
23.01.2020

Variationsmethoden

13. Übungsblatt

Aufgabe 35 (p-Laplace)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer und $p \in (1,\infty)$ und $q \in (p,\infty)$ falls $n \leq p$ bzw. $q \in (p, \frac{np}{n-p})$ falls $n > p$. Weiter seien $V, \Gamma \in L^\infty(\Omega)$ mit $V, \Gamma \geq 0$ fast überall und $\Gamma \not\equiv 0$. Betrachten Sie das Problem

$$(*) \begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + V(x)|u|^{p-2}u = \Gamma(x)|u|^{q-2}u, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Finden Sie eine geeignete Formulierung von schwachen Lösungen von $(*)$. Zeigen Sie: Es exisitiert eine nicht-triviale schwache Lösung von $(*)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Poincarè-Ungleichung auf $W_0^{1,p}(\Omega)$: Es existiert $C > 0$ (nur abhängig von p und Ω) so, dass $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definition
Sei X ein Banachraum und $L \in C^1(X,\mathbb{R})$. L erfüllt (PS) $:\Leftrightarrow$ L erfüllt $(\mathrm{PS})_c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 36 ((PS) Teil 1)

(a) Sei $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass $|L| + |\nabla L|$ koerziv ist. Zeigen Sie: L erfüllt (PS).

(b) *Korrektur:* $n = 1$. Sei $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von unten beschränkt und erfülle (PS). Zeigen Sie: L ist koerziv und nimmt sein Minimum an.

Aufgabe 37 ((PS) Teil 2)
Prüfen Sie (PS) für die folgenden Funktionale:

(a) $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x\sin(x)$.

(b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sin(x) + x\,y^2$.

(c) $L\colon L^2((0,1),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}|u|^2 \,\mathrm{d}x$.

(d) $L\colon W_0^{1,2}((0,1),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^1 \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}|u|^2 \,\mathrm{d}x$.

(e) $L\colon W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{p}|u|^p \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{1}{q_i}|u|^{q_i} \,\mathrm{d}x$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, nicht-leer, $p \in (1,\infty)$ und $q_i \in (p,\infty)$ falls $n \leq p$ bzw. $q_i \in (p, \frac{np}{n-p})$ falls $n > p$.