Insbesondere gilt für $f = \tilde{u}$: Ü13 ②/4

$$0 \overset{\tilde{u}\neq 0}{<} \int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^p + V(x)|\tilde{u}|^p dx = \lambda \int_\Omega \Gamma(x)|\tilde{u}|^q dx \implies \lambda > 0$$

Setze $t := \lambda^{\frac{1}{p-q}} > 0$, $u^* := t\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$

$$-\operatorname{div}(|\nabla u^*|^{p-2}\nabla u^*) + V(x)|u^*|^{p-2}u^*$$
$$= |t|^{p-2}t \cdot (-\operatorname{div}(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}) + V(x)|\tilde{u}|^{p-2}\tilde{u}) = |t|^{p-2}t\cdot\lambda\Gamma(x)|\tilde{u}|^{q-2}\tilde{u}$$
$$= \underbrace{\lambda\cdot|t|^{p-2}t\cdot|t|^{2-q}\cdot t^{-1}}_{=1}\cdot\Gamma(x)|u^*|^{q-2}u^*$$

$\implies u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ ist schw Lsg von (*). $\square$

136

a) Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $|L| + |\nabla L|$ ist Koerziv. Beh: L erfüllt (PS).

Bew: Sei $c \in \mathbb{R}$, $(x_k)_k \in \mathbb{R}^n$ mit $L(x_k) \to c$, $\nabla L(x_k) \to 0$.

Dann insb: $|c| + 0 = \lim_k |L(x_k)| + |\nabla L(x_k)|$. Wegen Koerzivität von $|L| + |\nabla L|$ ist $(|x_k|)_k$ beschränkt.

Nach Bolzano-Weierstraß ex konv TF. //

b) Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von unten beschr und erfülle (PS).

Beh: L ist koerziv und nimmt sein Minimum an.

Bew:

Schritt 1: L ist auf $[0,\infty)$ & $(-\infty, 0]$ unbeschränkt.

Annahme: $\sup_{[0,\infty)} L < \infty$.

Fall 1: $\exists (x_k)_k \in (0,\infty)$; $x_k \to \infty$: $L'(x_k) \to 0$

Dann: $-\infty < \inf_{\mathbb{R}} L \leq L(x_k) \leq \sup_{[0,\infty)} L < \infty$. Nach Bolzano-Weierstraß ex $c \in \mathbb{R}$ und TF $(x_{k_j})_j$ mit $L(x_{k_j}) \to c$. Nach (PS) ex konv TF von $(x_{k_j})_j$ ↯ $x_k \to \infty$.

Fall 2: $\forall (x_k)_k \in (0,\infty)$, $x_k \to \infty$: $L'(x_k) \not\to 0$

Dann: $\exists \rho > 0, \delta > 0\ \forall x \in [\rho, \infty)$: $|L'(x)| \geq \delta$

Stetigkeit von L': $L'|_{[\rho,\infty)} \geq \delta$ oder $L'|_{[\rho,\infty)} \leq -\delta$.

Fall 2.1: $L'|_{[\rho,\infty)} \geq \delta$.

Dann: $\forall x > \rho$: $\infty > \sup_{[0,\infty)} L \geq L(x) = L(\rho) + \int_\rho^x L'(s)ds \geq L(\rho) + (x-\rho)\cdot\delta \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ ↯

Fall 2.2: $L'|_{[\rho,\infty)} \leq -\delta$

Dann: $\forall x > \rho$: $-\infty < \inf_{\mathbb{R}} L \leq L(x) = L(\rho) + \int_\rho^x L'(s)ds \leq L(\rho) - (x-\rho)\cdot\delta \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$ ↯

$\implies \sup_{[0,\infty)} L = \infty$. Analog: $\sup_{(-\infty,0]} L = \infty$.

Schritt 2: L ist koerziv.

Annahme: $\exists (x_k)_k \in \mathbb{R} : |x_k| \to \infty$ & $\sup_k L(x_k) < \infty$.

OBdA: $0 < x_k < x_{k+1}$ (sonst wähle TF oder betrachte $(-x_k)_k$)

Nach Schritt 1: $\exists (y_k) \in [0,\infty) : y_k \to \infty$ & $L(y_k) \to \infty$.

Wähle TF von $(x_k)_k, (y_k)_k$ (wieder mit $(x_k)_k, (y_k)_k$ bezeichnet)

so dass: $0 < y_k < x_k < y_{k+1} < x_{k+1}$ & $L(y_k) > \sup_j L(x_j)$ $\forall k$.

Dann: $x_k \in (y_k, y_{k+1})$ & $L(y_k), L(y_{k+1}) > L(x_k)$.

Stetigkeit von L liefert: $\exists \xi_k \in (y_k, y_{k+1}) : L(\xi_k) = \min_{(y_k, y_{k+1})} L$.

Da $L \in C^1$ gilt insb.: $L'(\xi_k) = 0$.

Nach Konstruktion: $-\infty < \inf_{\mathbb{R}} L \leq L(\xi_k) \leq L(x_k) \leq \sup_j L(x_j) < \infty$

Nach BW ex $c \in \mathbb{R}$ & TF $(\xi_{k_j})_j$ mit $L(\xi_{k_j}) \to c$.

Nach (PS): $\exists$ Konv TF von $(\xi_{k_j})_j$ $\lightning$ zu $\xi_{k_j} \geq y_{k_j} \to +\infty$ //

Schritt 3: L nimmt sein Minimum an.

Sei $(x_k)_k \in \mathbb{R}$ mit $L(x_k) \to \inf L$. Koerzivität liefert: $(x_k)_k$ ist beschränkt. Nach BW ex $x \in \mathbb{R}$ und TF $(x_{k_j})_j$ mit $x_{k_j} \to x$. Stetigkeit von L liefert:

$L(x) = \lim_j L(x_{k_j}) = \inf L$ //

A37

a) Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \sin(x)$. Beh: L erfüllt (PS).

Bew: Klar: $L \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $L'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$.

Seien $c \in \mathbb{R}$, $(x_k)_k \in \mathbb{R}$ mit $L(x_k) \to c$ & $L'(x_k) \to 0$.

Dann: $|x_k \cdot \cos(x_k)| \leq |L'(x_k)| + |\sin(x_k)| = o(1) + 1$

$|x_k \cdot \sin(x_k)| = |L(x_k)| = o(1) + |c|$

$\Rightarrow |x_k| = |x_k| \cdot \sqrt{\cos^2(x_k) + \sin^2(x_k)} \leq |x_k||\cos(x_k)| + |x_k| \cdot |\sin(x_k)| = 1 + |c| + o(1)$

D.h. $(x_k)_k$ ist beschränkt, besitzt also nach BW konv TF.

b) Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(x) + xy^2$. Beh: L erfüllt (PS) nicht.

Bew: Klar: $L \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\nabla L(x,y) = (\cos(x) + y^2, 2xy)$

Setze $x_k := \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y_k := 0$. Dann: $|(x_k, y_k)| \to \infty$ und

$L(x_k, y_k) = 1$, $\nabla L(x_k, y_k) = (0,0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.