Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
28.01.2020

Variationsmethoden

14. Übungsblatt

Aufgabe 38 (Mountain-Pass Teil 1)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f(x,y) = 9(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2+y\sin(x)$. Zeigen Sie mithilfe des Mountain-Pass-Theorems: f besitzt einen strikt positiven kritischen Wert.

Aufgabe 39 (Mountain-Pass Teil 2)
Seien $L > 0$ und $\Omega \coloneqq (-L, L)$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' + (u+1)^+ - u - 1 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \qquad u(-L) = u(L) = 0, \end{cases}$$

mit $y^+ \coloneqq \max\{0, y\}$. Betrachten Sie das zugehöriges Funktional J. Zeigen Sie:

(a) Falls $L \geq \frac{\pi}{2}$, dann existiert ein nicht-trivialer kritischen Punkt von J.
Hinweis: Unterscheiden Sie $L > \frac{\pi}{2}$ und $L = \frac{\pi}{2}$ im Beweis.

(b) Falls $L < \frac{\pi}{2}$, dann ist 0 der einzige kritische Punkt von J.

Hinweis: $\varphi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$ erfüllt $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi_1 > 0$ in Ω und $-\varphi_1'' = \frac{\pi}{2L}\varphi_1$.

Aufgabe 40 (Beispiel zu Vorlesung)
Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Konstruieren Sie $L \in C^1(X, \mathbb{R})$, so dass L nicht Lipschitz-stetig auf *allen* beschränkten Mengen ist.
Hinweis: Es existiert eine Folge $(x_n)_n \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ für $n \neq m$. Nutzen Sie Funktionen mit Träger in Bällen um diese Punkte. Wählen Sie geeignete Funktionswerte dieser Funktionen in x_n.

Aufgabe 41 (Wiederholung)
Gehen Sie die Übungsblätter zu Teil 2 der Vorlesung durch und bringen Sie mindestens eine Frage mit zur Übung.