Vorkurs Mathematik

Vorbereitung auf das Studium der Mathematik

Herbst 2020

Skript

Institut für Analysis

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieser Kurs soll wichtige Bereiche Ihres Schulwissens möglichst konsistent aufbereiten. Er richtet sich insbesondere an Studierende, die Unsicherheiten im Umgang mit dem mathematischen Schulstoff haben oder deren Mathematikunterricht länger zurückliegt. Aber auch Studierende, denen der Schulstoff keine Schwierigkeiten mehr bereitet, können hier etwas mitnehmen, denn wir werden nicht nur das Rechnen üben, sondern auch das präzise Formulieren mathematischer Sachverhalte, insbesondere von mathematischen Beweisen. Diese Fähigkeiten werden ab dem 1. Semester eine zentrale Rolle spielen.

Die dargestellten Inhalte sind vielerorts, sei es frei erhältlich im Internet oder auf dem Büchermarkt, in guten Darstellungen zu finden. In diesen Kurs fließen aber die speziellen Erfahrungen des Lehrbetriebes an der Karlsruher mathematischen Fakultät ein. Über Jahre konnten wir gravierende Lücken vieler Studienanfänger im Umgang mit elementaren Rechentechniken und Definitionen, wie Rechnen mit Beträgen oder den sicheren Umgang mit Ungleichungen beobachten. Wenn solche Lücken nicht aufgearbeitet werden, kann daran leicht das erfolgreiche Studium scheitern. Auch beobachteten wir bei vielen Studienanfängern und -anfängerinnen große Hemmungen, sich eigenständig an das Lösen auch einfacherer Übungsaufgaben zu machen. Das ist aber unumgänglich um mit dem Fortschreiten des Stoffes Schritt zu halten und nicht irgendwann „abgehängt“ zu sein. Eine weitere Hürde für das Studium stellt für viele das Formulieren und Aufschreiben eines vollständigen Beweises dar. Auch an diesen Aspekt des Mathematikstudiums wollen wir Sie in diesem Vorkurs schon heranführen, insbesondere auch durch die Übungsaufgaben, die die Vorlesung ergänzen.

Es handelt sich bei diesem Skriptum um eine überarbeitete und erweiterte Version des Skriptes, das von Frau Dr. Johanna Dettweiler im Jahr 2009 für das Institut für Analysis erstellt und später von Alexander Ullmann und Andreas Bolleyer erweitert wurde. Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei den Tutorinnen und Tutoren des Vorkurses für Korrekturen und Anmerkungen zu diesem Skript und zu den Übungsblättern.

Karlsruhe, im Herbst 2016 Andreas Hirsch

1 Grundlagen

1.1 Aussagen und logische Vernüpfungen

Wenn man sich über Mathematik verständigen will, ist es unumgänglich zu verstehen, was eine mathematische Aussage ist und wie sie verknüpft werden kann. Erst dann kann man verstehen, was zum Beispiel ein mathematischer Beweis ist.

Definition 1.1.1 (*Mathematische Aussage*)
Eine **Aussage** *im mathematischen Sinn ist eine Feststellung deren Wahrheitsgehalt stets mit „wahr“ oder „falsch“ angegeben werden kann.*

Beispiele:

(1) Mathematische Aussagen sind

- Dienstag ist ein Wochentag.
- Dienstag ist Montag.
- 2 ist eine gerade Zahl.
- $2 = 1$

(2) **Keine** mathematischen Aussagen sind

- Ich denke, also bin ich.
- $x^2 + 2x + 1$.
- $x + 1 = 0$

Wir benötigen natürlich die Möglichkeit mathematische Aussagen in eine Relation zueinander zu stellen oder zu verknüpfen. Wir werden daher folgende **logische Operationen** für Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ verwenden:

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung der Verknüpfung
1. Negation	$\neg\mathcal{A}$	nicht $\mathcal{A}$
2. Konjunktion (und)	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
3. Disjunktion (oder)	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$
4. Implikation (Folgerung)	$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$	aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$
5. Äquivalenz (genau dann, wenn)	$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent, d.h. es gilt $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$

Sie werden definiert über Wahrheitstafeln (dabei steht „w“ für wahr und „f“ für falsch):

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkung:

(1) Das logische „oder“ ist nicht-ausschließend, also nicht zu verwechseln mit „entweder ... oder“.

(2) Ist $\mathcal{A}$ falsch, so ist die Implikation $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ stets wahr („ex falso quodlibet“)! Zum Beispiel gilt $1 < 0 \Longrightarrow 2 = 3$.

(3) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei mathematische Aussagen und es gelte $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Dann heißt $\mathcal{A}$ **hinreichende Bedingung für** $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ **notwendige Bedingung für** $\mathcal{A}$.

Definition 1.1.2 (*Tautologische Äquivalenz*)
Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Aussagen. Erzeugen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ die gleiche Wahrheitstafel, so heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ tautologisch äquivalent und wir schreiben $\mathcal{C} \mathrel{=\!\!|\!\models} \mathcal{D}$.

Beispiele:

(1) $\neg\neg\mathcal{A} := \neg(\neg\mathcal{A}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \mathcal{A}$,

(2) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \big(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}\big)$,

(3) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \big(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}\big)$,

(4) $(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\neg A \vee \mathcal{B})$,

(5) $(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\neg\mathcal{B} \Longrightarrow \neg\mathcal{A})$,

(6) $(\mathcal{A} \iff \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})\big)$.

Diese tautologischen Äquivalenzen werden wir später benötigen um zum Beispiel mathematische Beweise zu führen. Um diesen Begriff zumindest auf sprachlicher Ebene zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes

Beispiel:

Die Aussage „Wenn es regnet, wird die Straße nass“ lässt sich als Implikation $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ auffassen mit den Aussagen $\mathcal{A}$: *Es regnet* und $\mathcal{B}$: *Die Straße wird nass*. Wenn die Straße also nicht nass wird, kann es nicht regnen, d.h. wir haben tautologische Äquivalenz zur Aussage $\neg\mathcal{B} \Longrightarrow \neg\mathcal{A}$, aber wenn die Straße (wie auch immer) nass wird, können wird daraus nicht folgern, dass es auch regnet.

1.2 Mengen

„Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor: *Eine* **Menge** *ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zu der Menge gehört oder nicht.*

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben $A, B, C, ...$ und Objekte mit kleinen Buchstaben $a, b, c, ...$ bezeichnet. Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die **leere Menge**, d.h. die Menge, die keine Objekte enthält.

Beispiele zur Darstellung von Mengen:

(1) Es seien a, b, c, d, e Objekte. Um diese Objekte zu einer Menge zusammenzufassen schreiben wir $\{a, b, c, d, e\}$.

Beispiel: Die Menge A der Buchstaben des Namens „Paula“, mit Unterscheidung großer und kleiner Buchstaben, ist

$$A = \{P, a, u, l, a\} = \{P, a, u, l\} = \{l, P, u, a\},$$

(2) Es seien X eine Menge und für $x \in X$ sei $\mathcal{E}(x)$ eine mathematische Aussage. Nun können wir die Menge E aller $x \in X$ betrachten für die $\mathcal{E}(x)$ wahr ist.

$$\text{Notation: } E = \{x \in X \mid \mathcal{E}(x) \text{ ist wahr }\} = \{x \in X \mid \mathcal{E}(x)\}.$$

Beispiel: Es sei A wie im Beispiel aus (1).

$$B \quad = \quad \{x \in A \mid x \text{ ist ein Großbuchstabe}\} = \{P\}$$

Dabei ist zu beachten, dass P und $\{P\}$ sehr verschiedene Objekte sind. Bei P handelt es sich um einen Buchstaben und bei $\{P\}$ um die Menge, die nur den Buchstaben P als Element enthält.

Definition 1.2.1 (*Element,Teil- und Obermenge)*
Es seien A und B Mengen.

(a) *Es sei a ein Objekt. Ist a in A enhalten, nennen wir a ein* **Element** *von A.*

$$\textit{Notation:} \;\; a \in A.$$

Ist a nicht in A enthalten, schreiben wir $a \notin A$.

(b) *Gilt für jedes $a \in A$, dass $a \in B$, sagen wir "A ist* **Teilmenge** *von B" und "B ist* **Obermenge** *von A".*

$$\textit{Notation:} \quad A \subseteq B.$$

Ist A keine Teilmenge von B, schreiben wir $A \nsubseteq B$.

(c) *Sei $A \subseteq B$. Gibt es ein $b \in B$, welches nicht in A enthalten ist, sagen wir "A ist eine* **echte Teilmenge** *von B" und "B ist eine* **echte Obermenge** *von A".*

$$\textit{Notation:} \;\; A \subsetneq B.$$

(d) *Wir sagen, dass A und B gleich sind, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten.*

$$\textit{Notation:} \;\; A = B.$$

Definition 1.2.2 (*geordnetes Paar, Tripel)*
Das **geordnete Paar** *(a, b) ist eine Zusammenfassung zweier Objekte a, b zu einer Einheit. Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn sowohl ihre ersten als auch ihre zweiten Komponenten gleich sind, d.h. wenn $a = c$ und $b = d$ gelten. Ähnlich ist ein* **Tripel** *(a, b, c) eine Zusammenfassung von drei Objekten a, b, c. Zwei Tripel (a, b, c) und (d, e, f) sind genau dann gleich, wenn $a = d$, $b = e$ sowie $c = f$ sind.*

Definition 1.2.3 (*Vereinigung, Schnitt, Komplement und kartesisches Produkt)*
Es seien A und B Mengen. Wir definieren

(a) *die* **Vereinigung** *von A und B durch*

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \;\vee\; x \in B\},$$

(b) den **Schnitt** *von A und B durch*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

(c) das **relative Komplement** *von B in A durch*

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\},$$

(d) das **kartesisches Produkt** *von A und B durch*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Beispiel: Es seien a, b, c, d paarweise verschiedene Objekte und $A = \{a, b, c\}$ sowie $B = \{a, c, d\}$. Dann gilt:

(1) $A \nsubseteq B, \qquad B \setminus \{d\} \subsetneq A.$

(2) $A \cup B = \{a, b, c, d\}, \qquad A \cap B = \{a, c\}, \qquad A \setminus B = \{b\}, \qquad B \setminus A = \{d\}.$

Bemerkung:

Die in den letzten beiden Definitionen eingeführten Objekte und Mengen existieren stets. Diese Tatsache ist alles andere als trivial und benötigt unter anderem eine Präzisierung des Mengenbegriffes.

1.3 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Wir gehen an dieser Stelle davon aus, dass die grundlegenden Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bekannt sind und werden daher nur informal an die wesentlichen Eigenschaften erinnern. Im Rahmen von fortführenden Vorlesungen werden Sie zumindest teilweise auch eine stringente Konstruktion dieser Zahlenbereiche und Herleitung der charakterisierenden Eigenschaften kennenlernen.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, und jede Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$; es gibt also keine größte natürliche Zahl. In $\mathbb{N}$ sind die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a + b, a \cdot b \in \mathbb{N}$.
Außerdem setzen wir $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$: In $\mathbb{Z}$ besitzt die Gleichung $x + b = a$ ($a, b \in \mathbb{N}$, x unbekannt, a, b bekannt) in $\mathbb{Z}$ stets eine Lösung. In $\mathbb{Z}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ keine kleinste Zahl. In $\mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen $+, -$ und $\cdot$

uneingeschränkt ausführbar.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ für ein } a \in \mathbb{Z} \text{ und ein } b \in \mathbb{N}\right\}$: Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen stets noch unendlich viele andere rationale Zahlen. Es gilt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. In $\mathbb{Q}$ sind die Rechenoperationen $+, -$ und $\cdot$ sowie teilen durch Elemente $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ uneingeschränkt ausführbar.

Beispiel: $\frac{1}{3} = 0,3333.... \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$: Jede rationale Zahl lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben und umgekehrt stellt jede endliche oder periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl dar. In diesem Kontext soll es genügen, sich unter der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen alle möglichen Dezimalzahlen vorzustellen, also endliche, periodische und nicht endliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Auch in $\mathbb{R}$ sind die Rechenoperationen $+, -, \cdot$ sowie Division durch Elemente $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uneingeschränkt ausführbar.

Bemerkung: Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den angegebenen Zahlenbereichen:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Da wir nicht wirklich definiert haben, was reelle Zahlen sind (und dies in diesem Kurs nicht sinnvoll wäre), ist die letzte Inklusion mit Vorsicht zu genießen. Zur Veranschaulichung dieser Inklusion kann man folgenden Sachverhalt heranziehen. Man kann zeigen, dass keine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$ existiert (siehe Aufgabe 6). Diese Gleichung wird allerdings von $\sqrt{2}$ gelöst und daher ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Auch die Eulersche Zahl e und π sind Elemente von $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Diese reellen Zahlen werden in der Vorlesung Analysis I sauber definiert.

1.4 Rechenregeln für reelle Zahlen und Ordnungsrelationen

1.4.1 Rechenregeln für reelle Zahlen

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

Kommutativgesetz der	Addition	$a + b = b + a$
	Multiplikation	$ab = ba$
Assoziativgesetz der	Addition	$(a + b) + c = a + (b + c)$
	Multiplikation	$(ab)c = a(bc)$
Distributivgesetz		$a(b + c) = ab + ac$
1. binomische Formel		$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel		$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel		$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Vorzeichenregeln		$-(-a) = a$
		$-(a + b) = -a - b$
		$-(a - b) = -a + b$

Die Regeln der Bruchrechnung werden als bekannt vorausgesetzt.

1.4.2 Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

Wir vereinbaren für $a, b \in \mathbb{R}$:

$a = b$ steht für „a ist gleich b“,

$a < b$ steht für „a ist echt kleiner als b“,

$a \leq b$ steht für „a ist kleiner oder gleich b“,

$a > b$ steht für „a ist echt größer als b“,

$a \geq b$ steht für „a ist größer oder gleich b“.

Beachte: Nach Definition impliziert $a < b$, dass $a \leq b$, aber im Allgemeinen impliziert $a \leq b$ nicht, dass $a < b$!

Die reellen Zahlen können auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Für zwei beliebige reelle Zahlen x, y kann eindeutig entschieden werden, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ gilt. Auf der Menge der reellen Zahlen ist also eine Ordnungsstruktur gegeben. Für diese gelten folgende Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$

Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$

Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

$a \cdot b > 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$)

$a \cdot b < 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b < 0$) oder ($a < 0$ und $b > 0$)

$a \cdot b = 0$ gilt genau dann, wenn ($a = 0$ oder $b = 0$)

Entsprechende Aussagen gelten auch für $\leq$ und $\geq$ anstelle von $<$ bzw. $>$.

1.5 Intervalle

Definition 1.5.1 (*Intervall*)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Das **offene Intervall** (a, b) *ist die Menge*

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Das **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ *ist die Menge*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Die **halboffenen Intervalle** *sind definiert als die Mengen*

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Im Fall $a = b$ haben wir die **(entarteten) Intervalle**

$$[a, a] := \{a\} \quad \textit{und} \quad [a, a) = (a, a] = (a, a) := \emptyset.$$

Weiter sind die **unendlichen Intervalle** *definiert als die Mengen*

$$\begin{aligned}
(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} & (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} & [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Der Schnitt zweier Intervalle ist stets ein Intervall (evtl. die leere Menge). Die Vereinigung zweier Intervalle kann ein Intervall sein, muss es aber nicht.

Beispiele:

(1) $[3, 4] \cap [1, \infty) = [3, 4]$,

(2) $[-2, 0) \cap (-1, 0] = (-1, 0)$,

(3) $[4, 7] \cap [8, 9) = \emptyset$,

(4) $[7, 8] \cap [8, 9) = [8, 8] = \{8\}$,

(5) $[4, 5) \cup (-3, 1]$ ist kein Intervall,

(6) $[4, 5] \cup (-3, 4) = (-3, 5]$.

1.6 Mathematische Beweise

In diesem Abschnitt lernen Sie die grundlegende logische Beweisstrukturen kennen, die Ihnen während ihres ganzen Mathematikstudiums begegnen werden.
Wir betrachten folgende Situation: Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Wir wollen unter der Voraussetzung $\mathcal{A}$ die Aussage $\mathcal{B}$ folgern. Wir finden daher die Struktur

Voraussetzung: $\mathcal{A}$ Behauptung: $\mathcal{B}$.

und wollen $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ zeigen. Dazu haben wir ausschließlich die folgenden Mittel zur Verfügung:

(i) Die Aussage $\mathcal{A}$.

(ii) Axiome und bereits bewiesene Aussagen, insbesondere geltende Rechenregeln.

(iii) Die logischen Verknüpfungen aus Abschnitt 1.1.

Man unterscheidet die folgenden Beweistechniken:

(1) **Der direkte Beweis:** Wir setzen die Aussage $\mathcal{A}$ voraus und folgern unter Verwendung von (i)-(iii) auf direktem Wege die Aussage $\mathcal{B}$. Schematisch könnte das zum Beispiel so aussehen:

$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B},$$

mit einer weiteren Aussage $\mathcal{C}$.

(2) **Die Kontraposition:** Wir haben schon gesehen, dass $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ tautologisch äquivalent zur Aussage $\neg\mathcal{B} \Longrightarrow \neg\mathcal{A}$ ist. Also können wir auch so vorgehen: Wir setzen $\neg\mathcal{B}$ voraus und folgern unter Verwendung von (i)-(iii) die Aussage $\neg\mathcal{A}$. Zum Beispiel:

$$\neg\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{D} \Longrightarrow \neg\mathcal{A},$$

mit einer weiteren Aussage $\mathcal{D}$.

(3) **Der Widerspruchsbeweis:** Wir setzen $\mathcal{A}$ voraus und nehmen an, dass $\neg\mathcal{B}$ gilt. Also gilt $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$. Daraus folgert man nun $\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}$ für eine weitere Aussage $\mathcal{C}$. Nun können aber $\mathcal{C}$ und $\neg\mathcal{C}$ nicht gleichzeitig gelten, woraus wir $\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C})$ folgern. Da wir aus $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ die Aussage $\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}$ gefolgert haben, kann man mittels tautologischer Äquivalenz aus $\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C})$ die Aussage $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ folgern. Schematisch sieht das so aus:

$$(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}) \;=\!|\!\models\; (\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}) \Longrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

wobei

$$(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \;=\!|\!\models\; (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}).$$

(4) **Der Induktionsbeweis:** Es sei $\mathcal{A}$ eine Eigenschaft so, dass $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage ist. Wir nehmen an, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $\mathcal{A}(1)$ ist wahr,

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{A}(n)$ ist wahr $\Longrightarrow \mathcal{A}(n+1)$ ist wahr.

Dann ist $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr. Man nennt dabei (i) den **Induktionsanfang** und (ii) den **Induktionsschluss**.

Wir wollen nun zeigen, dass (i) und (ii) tatsächlich liefern, dass $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. wir beweisen, dass der Induktionsbeweis ein valider Beweis ist.

Beweis: Es sei $m \in \mathbb{N}$. Nach (ii) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{A}(n) \text{ ist wahr} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(n+1) \text{ ist wahr.}$$

Dann folgt

$$\mathcal{A}(1) \text{ ist wahr} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(2) \text{ ist wahr} \quad \Longrightarrow \quad ... \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(m) \text{ ist wahr.}$$

Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, folgt "$\mathcal{A}(m)$ ist wahr" für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Ein Spezialfall der Kontraposition, den man häufig anwenden kann, ist der Beweis durch Gegenbeispiel. Sei zum Beispiel X eine Menge und $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ jeweils eine Aussage über $x \in X$. Nehmen wir an wir wollen folgende Behauptung widerlegen:

$$\text{Für jedes } x \in X \text{ gilt: } \mathcal{A}(x) \implies \mathcal{B}(x).$$

Dazu benötigt man ein $\tilde{x} \in X$ mit der Eigenschaft $\mathcal{A}(\tilde{x}) \wedge \neg\mathcal{B}(\tilde{x})$. Dann ist $\tilde{x}$ ein Gegenbeispiel für die Behauptung.

Beispiele:

zu (1) Man beweise, dass das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl gerade ist.
Wir werden dieser Aufforderung nachkommen, indem wir einen direkten Beweis führen.

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$ ist gerade.

Behauptung: n^2 ist gerade.

Beweis: Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist gegeben durch

$$G := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2k\}.$$

Nach Voraussetzung ist $n \in G$. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Dann folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2.$$

Da $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$, folgt, dass $n^2 \in G$ per Definition. $\square$

zu (2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass n ungerade ist, falls n^2 ungerade ist.
Wir werden einen Beweis durch Kontraposition führen.

Voraussetzung: n^2 ist ungerade.

Behauptung: n ist ungerade.

Beweis: Wir sollen zeigen, dass n^2 ungerade impliziert, dass n ungerade ist. Per Kontraposition müssen wir also zeigen, dass n gerade, impliziert, dass n^2 gerade ist. Dies haben wir in (1) aber schon gezeigt. □

zu (3) Man beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Wir werden dies durch einen Widerspruchsbeweis zeigen.

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Wir nehmen an es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_n$, wobei p_n die größte Primzahl sei. Dann setzen wir

$$m := p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$$

Dann ist

$$m + 1 > m = p_1 \cdot ... \cdot p_n \geq p_n$$

und damit $m+1$ keine Primzahl. Ist nun p ein Primteiler von $m+1$, dann ist $p \in \{p_1, ..., p_n\}$ und es existiert ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $p = p_j$. Dann teilt p insbesondere m und $m + 1 - m$. Da nun $m + 1 - m = 1$ muss $p = 1$ gelten und da 1 keine Primzahl ist gilt insgesamt "p ist eine Primzahl" und "p ist keine Primzahl" und dies ist ein Widerspruch. □

zu (4) Man beweise für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{n+1} + 3^{2n-1} = 7k$.

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}(n) := \text{Es existiert ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^{n+1} + 3^{2n-1} = 7k.$$

Behauptung: $\mathcal{A}(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis: Wir beginnen mit dem Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt

$$2^{n+1} + 3^{2n-1} = 2^2 + 3^1 = 7.$$

Mit $k = 1$ ist daher $\mathcal{A}(1)$ wahr.
Nun zum Induktionsschluss. Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}(n)$ wahr. Dann existiert $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$2^{n+1} + 3^{2n-1} = 7k_n$$

und damit

$$\begin{aligned}2^{(n+1)+1} + 3^{2(n+1)-1} &= 2^{n+2} + 3^{2n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2(2^{n+1} + 3^{2n-1}) + 7 \cdot 3^{2n-1} = 7(2k_n + 3^{2n-1}).\end{aligned}$$

Wegen $3^{2n-1} \in \mathbb{N}$ gilt $2k_n + 3^{2n-1} \in \mathbb{N}$ und daher ist $\mathcal{A}(n+1)$ wahr. $\square$

2 Reelle Funktionen I

In diesem Kapitel wenden wir uns dem Begriff der *Funktion* zu. Wir werden damit beginnen, abstrakt zu formulieren, was wir unter einer Funktion verstehen, und danach verschiedene Beispiele für reellwertige Funktionen diskutieren, die aus der Schule geläufig sein sollten. Im Rahmen dieser Beispiele behandeln wir insbesondere elementare Rechenregeln für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.
Bei dem Funktionsbegriff beschränken wir uns vorerst auf die nötigen Konzepte, die im nächsten Kapitel zum Verständins von Gleichungen und Ungleichungen benötigt werden. In Kapitel 4 werden wir den Funktionsbegriff aufgreifen und weitere Konzepte und Beispiele kennenlernen.

Definition 2.0.1 (*Funktion, Definitions-, Wertebereich, Bild)*
Es seien X, Y Mengen und $x \mapsto f(x)$ eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet.

(a) Das Tripel $(X, x \mapsto f(x), Y)$ nennt man **Funktion** *und bezeichnet dieses kurz mit $f : X \to Y$ oder f, falls keine Verwechslungen möglich sind.*

$$\textit{Notation:} \qquad f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x).$$

Dabei bezeichnet man X als **Definitionsbereich** *und Y als* **Wertebereich** *von f.*

(b) Sind $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$, so bezeichnet man

$$f(A) := \{y \in Y \mid \text{es existiert ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

als **Bild von** A **unter** f. *$f(X)$ heißt* **Bild von** f.

(c) Sind $f : X \to Y$ eine Funktion und $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ so nennen wir f eine **reelle Funktion**.

Anhand dieser Definition ist ersichtlich, dass es sich bei einer Funktion nicht nur um eine Zuordnungsvorschrift handelt. Der Definitions- und Wertebereich von f ist ebenfalls von Bedeutung, zum Beispiel wenn man sich genauer mit Eigenschaften von Funktionen auseinandersetzt. Insbesondere gilt nicht immer $f(X) = Y$ (siehe Bemerkung (2) auf der nächsten Seite).

Merke: Schreiben wir $f(x)$, so handelt es sich um einen konkreten (unter Umständen unbestimmten) Funktionswert, aber niemals um die Funktion selbst!

Bemerkung:

(1) Es gibt eine weitere sehr verbreitete Notation für die Definition einer Funktion. Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (x+1)(x-2)$$
ließe sich auch völlig korrekt wie folgt definieren:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := (x+1)(x-2).$$

(2) Wir betrachten die zwei Funktionen
$$f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto n+1 \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+1.$$
Die Zuordnungsvorschriften von f_1 und f_2 sind gleich, nämlich
$$f_1(n) = f_2(n) = n+1.$$
Aber die Funktion f_2 hat eine Eigenschaft, die f_1 nicht hat. Wir sehen ohne Mühe ein, dass $f_1(\mathbb{N}_0) = f_2(\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass das Bild von f_2 mit dem Wertebereich der Funktion übereinstimmt. Bei f_1 ist das nicht der Fall, da $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$. Wir haben also einen qualitativen Unterschied zwischen f_1 und f_2 festgestellt. Das lässt darauf schließen, dass diese beiden Funktionen nicht "gleich" sind, obwohl sie die gleiche Zuordnungsvorschrift besitzen.

Ein kleiner philosophischer Ausflug: Man könnte bei dem definierten Funktionsbegriff aus Definition 2.0.1 (a) kritisieren, dass dies keine mathematisch präzise Definition ist, und dieser Kritik wäre nichts entgegenzusetzen. Für diesen Mangel an Präzision gibt es aber einen sehr guten Grund. Definitionen ermöglichen die Kommunikation über mathematische Themen, da man in ihnen Konzepte, Vorstellungen oder Eigenschaften von bestimmten Objekten in einem Begriff zusammenfasst. Zum Beispiel haben wir in Kapitel 1 mathematisch präzise den Begriff Teilmenge definiert, da alle auftretenden Begriffe in dieser Definition schon vorher definiert worden sind. Diese Objekte waren "Element" und "Menge" und genau hier ergibt sich ein Problem. Denn wir haben den Begriff "Menge" nicht mathematisch präzise sondern auf eine abstrakte und sehr unpräzise Art definiert. Das hat den Grund, dass wir bei dem Begriff "Menge" an einem der elementarsten mathematischen Objekte angelangt sind, der sich nicht als Kombination bisheriger Definitionen oder als Spezialfall einer solchen auffassen lässt. Vielmehr ist dieser Begriff unserer eigenen Denkweise geschuldet und etwas provokant formuliert, einfach zu elementar um mathematisch präzise definiert zu werden.
Bei dem Begriff "Funktion", handelt es sich ebenfalls um einen sehr elementaren Begriff und wir belassen es daher bei dem oben eingeführten Funktionsbegriff, der zwar einerseits unpräzise, aber andererseits für die mathematische Praxis und die eigene Vorstellung mehr als ausreichend ist.

Ab sofort werden wir uns nur noch mit reellen Funktionen beschäftigen, d.h. von jetzt an betrachten wir ausschließlich Funktionen der Form $f : X \to Y$ mit $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.
In den folgenden Abschnitten werden wir diverse Rechenoperationen definieren, deren Handhabung absolutes Basiswissen darstellt. Trotzdem werden wir diese noch einmal definieren und die wichtigsten Rechenregeln aufführen. Dabei definieren wir zu jeder Operation eine Funktion, die wir mit einem geeigneten Definitionsbereich ausstatten.

2.1 Potenzen und Wurzeln

2.1.1 Ganzzahlige Potenzen

Definition 2.1.1 (*Ganzzahlige Potenz*)
*Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Die m-**te Potenz** definieren wir als*

$$\begin{aligned} a^m &= 1, && \text{falls } m = 0, \\ a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-mal}, && \text{falls } m > 0, \\ a^m &= \frac{1}{a^{-m}}, && \text{falls } a \neq 0 \text{ und } m < 0. \end{aligned}$$

*Die Zahl a heißt **Basis**, m heißt **Exponent**.*

Es gelten die folgenden *Potenzgesetze*: Für jedes $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

(a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,

(c) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

(d) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$,

(e) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

2.1.2 Die n-te Wurzel

Definition 2.1.2 (*n-te Wurzel*)
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

*(a) Es sei $a \in [0, \infty)$. Die n-**te Wurzel** aus a ist die reelle Zahl x mit $x \geq 0$, für die $x^n = a$ gilt.*

Notation: $a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a}$.

(b) Ist n ungerade und $a \in (-\infty, 0)$, setzen wir

$$\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}.$$

Beispiele:

(1) Wir suchen jedes $y \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $y^2 = 4$. Jedem wird klar sein, dass diese Gleichung nur von $y = 2$ oder $y = -2$ gelöst wird. Bilden wir aber $\sqrt{4}$, so erhalten wir nach obiger Definition 2. Allgemein kann man sagen, dass für festes $x \in [0, \infty)$ die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ die positive Lösung der Gleichung $y^2 = x$ ist.

(2) $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ ist die Lösung von $x^3 = -8$, also $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Es gelten die folgenden *Wurzelgesetze*: Es seien $a, b \in [0, \infty)$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,

(b) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ und $\sqrt[n]{a^n} = a$,

(c) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, falls $b > 0$,

(d) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$.

Beispiele:

(1) $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{10} = 2$.

(2) $6 = \sqrt{4}\sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.

(3) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$.

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

(5) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$.

Achtung: Der Ausdruck $\sqrt{5}$ im letzten Beispiel ist bereits als Endergebnis anzusehen. Die (zuweilen in der Schule verwendete) Notation $\sqrt{5} = 2,2361$ ist hingegen **nicht zulässig**! Gleichheit im mathematischen Sinn ist die (abstrakte) Gleichheit zweier Objekte (vgl. Kapitel 1) und kann nicht durch irgendwelche Konventionen (wie „Runden nach der vierten Nachkommastelle“) relativiert werden. Die Schreibweise $\sqrt{5} \approx 2,2361$ bedeutet hingegen soviel wie $\sqrt{5}$ ist “ungefähr“ 2,2361 und ist unter Umständen vertretbar, wenn z.B. nach der ungefähren Größenordnung eines Ausdrucks gefragt wird. Dies wird aber in diesem Vorkurs gar nicht und im Studium wohl selten passieren.

2.1.3 Rationale Potenzen

Definition 2.1.3 (*Die Rationale Potenz)*
Es sei $a \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die **rationale** *oder* **gebrochene Potenz** *a^r durch*

$$a^r := (\sqrt[q]{a})^p = (a^{\frac{1}{q}})^p$$

Um diese Definition von a^r mathematisch sauber zu rechtfertigen, muss man noch zeigen, dass die Potenz a^r *wohldefiniert* ist, also unabhängig von der konkreten Darstellung der rationalen Zahl r als Bruch $\frac{p}{q}$. Wie wir wissen, kann man dieselbe Zahl r auf verschiedene

Arten als Bruch schreiben, zum Beispiel ist $\frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Es ist also zu zeigen, dass durch die a priori verschiedenen Ausdrücke $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, in diesem Beispiel $\left(a^{\frac{1}{9}}\right)^3, \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2, \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^1$, jedes mal *dieselbe* Zahl definiert wird. Dies werden wir nun zeigen.

Voraussetzung: Es sei $a \in (0, \infty)$, $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ mit $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q, n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Beweis: Zuerst gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \iff np = mq.$$

Damit erhalten wir

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\left((a^{\frac{1}{n}})^n\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left((a^{\frac{1}{n}})^{np}\right)^{\frac{1}{q}} = \left((a^{\frac{1}{n}})^{mq}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left((a^{\frac{1}{n}})^m\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

$\square$

Anhand der Rechnung im obigen Beweis wird es kaum überraschen, dass auch für gebrochene Potenzen entsprechende Potenzgesetze gelten: Seien $a, b \in (0, \infty)$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

(b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(c) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,

(d) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$,

(e) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

Bisher haben wir für $a \in (0, \infty)$ den Ausdruck a^x nur für $x \in \mathbb{Q}$ definiert. Im Rahmen der Vorlesung Analysis 1 werden wir sehen, wie man die Definition auch auf beliebige $x \in \mathbb{R}$ ausdehnen kann.

Beispiel (Rationalmachen des Nenners):

(1) Es seien $b \in \mathbb{R}$, $a \in (0, \infty)$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Terme der Form $\frac{b}{a^{\frac{m}{n}}}$ kann man durch Erweitern mit $a^{1-\frac{m}{n}}$ in eine einfachere Form bringen. Zum Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{1/3}} \cdot \frac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

(2) Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $a, b \in [0, \infty)$ mit $a \neq b$. Terme der Form $\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ lassen sich durch Erweitern mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ in eine einfachere Form bringen. Zum Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

2.1.4 Die rationale Potenzfunktion

Definition 2.1.4 (*Rationale Potenzfunktion*)
Es sei $r \in \mathbb{Q}$. Die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^r$$

heißt **rationale Potenzfunktion**, *wobei*

(a) $X = \mathbb{R}$, *falls* $r \in \mathbb{N}_0$,

(b) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *falls* $r \in \mathbb{Z}$ *und* $r \in (-\infty, -1]$,

(c) $X = [0, \infty)$, *falls* $r \notin \mathbb{N}$ *und* $r \in (0, \infty)$,

(d) $X = (0, \infty)$, *falls* $r \notin \mathbb{Z}$ *und* $r \in (-\infty, 0)$.

Wir wollen noch auf die wichtigsten Spezialfälle eingehen:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^n$$

nennt man die n**-te Potenzfunktion**. Aus diesen Funktionen lassen sich folgende grundlegende Funktionen generieren. Es seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann bezeichnet man eine Funktion der Form

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

als **Polynom** n**-ten Grades**.

(2) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Die Funktion

$$w_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

nennt man n**-te Wurzelfunktion**.

2.2 Der Logarithmus

Definition 2.2.1 (*Der Logarithmus*)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$. Unter dem **Logarithmus von** a **zur Basis** b *versteht man diejenige reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, für die $b^c = a$ gilt.*

$$\textit{Notation:} \;\; c := \log_b(a).$$

Die Funktion

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_b(x)$$

nennt man **Logarithmusfunktion zur Basis** b. *Die Funktion*

$$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto b^x$$

nennt man **Exponentialfunktion zur Basis** b.

Beachte: Es handelt sich hierbei um die *übliche* Definition für Logarithmen, die Ihnen auch aus der Schule geläufig sein sollte. Diese ist zum jetzigen Zeitpunkt in zweierlei Hinsicht problematisch:

1. Wir nehmen, ohne es wirklich zu wissen, an, dass genau ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, welches $b^c = a$ erfüllt. Dies wird in der Vorlesung Analysis I geklärt.

2. Der Ausdruck b^c ist für irrationales $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ noch gar nicht definiert. Daher beschränken wir uns bei konkreten Rechenbeispielen auf den Fall, dass c rational ist.

Die folgenden Tatsachen kann man leicht selbst überprüfen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \in (0, \infty)$, $r \in \mathbb{R}$ und $b \neq 1$ gilt:

(1) $a = b^{\log_b(a)}$, (2) $\log_b(1) = 0$,

(3) $\log_b(b) = 1$, (4) $a^r = b^{r \cdot \log_b(a)}$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch auf einen wichtigen Spezialfall hinweisen. Hierfür benötigt man allerdings die eulersche Zahl e, deren Definition wir hier nicht geben wollen (und können). Dies wird ebenfalls in der Vorlesung Analysis 1 geschehen.

Definition 2.2.2 (*Der natürliche Logarithmus*)
Es sei $a \in (0, \infty)$ und e die eulersche Zahl. Wählt man in der obigen Definition die Basis $b = e$, so nennt man

$$\ln(a) = \log(a) := \log_e(a)$$

den **natürlichen Logarithmus**. *Die Funktion*

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log(x)$$

nennt man **natürliche Logarithmusfunktion**. *Die Funktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), \qquad x \mapsto e^x$$

heißt **Exponentialfunktion**.

2.2.1 Die Logarithmengesetze

Wir werden in diesem Abschnitt auf das Rechnen mit Logarithmen eingehen und hierfür die wichtigsten Regeln wiederholen. Besondere Beachtung verdienen dabei die folgenden *Logarithmengesetze* : Es seien $x, y, b \in (0,\infty)$ mit $b \neq 1$, $z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$,

(b) $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$,

(c) $\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x)$,

Beispiel: Es gilt

$$\begin{aligned} \log(32) + \log(18) + \log(81) &= \log(2^5) + \log(2 \cdot 3^2) + \log(3^4) \\ &= 5\log(2) + \log(2) + 2\log(3) + 4\log(3) \\ &= 6\log(2) + 6\log(3). \end{aligned}$$

Ein weiteres praktisches Hilfsmittel für den Umgang mit dem Logarithmus ist die folgende *Umrechungsformel* : Für $a, b, d \in (0,\infty)$ und $b, d \neq 1$ gilt

$$\log_d a = \frac{\log_b a}{\log_b d}.$$

Es reicht also wenn man Logarithmen nur bezüglich einer bestimmten Basis b berechnen kann, um Logarithmen bezüglich beliebiger Basen auszurechnen.
Machen wir uns kurz klar, warum dies korrekt ist. Es gilt

$$\log_b a = \log_b\left(d^{\log_d a}\right) = (\log_d a)(\log_b d).$$

Bringt man $\log_b d$ auf die linke Seite, erhalten wir besagte Umrechnungsformel.

Beispiele:

(1) $2^x = 16 \iff x = 4$,

(2) $3^x = \frac{1}{9} \iff x = -2$,

(3) $\log_x 36 = 2 \iff x = 6$,

(4) $\log_x \frac{1}{64} = -6 \iff x = 2$,

(5) $\log_5 125 = x \iff x = 3$,

(6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = x \iff x = 4$,

(7) $\log_3 x = 5 \iff x = 243$,

(8) $\log_2 x = -5 \iff x = \frac{1}{32}$.

2.3 Der Betrag

Definition 2.3.1 (*Der Betrag*)
Der **Betrag** *von $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

Außerdem nennen wir

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad x \mapsto |x|$$

die **Betragsfunktion**.

Beispiele:

(1) $|-3| = -(-3) = 3$ und $|3| = 3$, (2) $|0| = 0$.

Man kann sich den Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ als den Abstand auf der Zahlengeraden zwischen a und 0 vorstellen. Sind nun $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $|a - b|$ also der Abstand zwischen $a - b$ und 0, oder anders interpretiert der Abstand von a und b.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $|a| \geq 0$, und $|a| = 0 \iff a = 0$, (b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

(c) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (d) $|a| = \sqrt{a^2}$.

Die Abschätzung aus (c) nennt man die “Dreiecksungleichung”.

Beispiele:

Schreiben Sie jeweils die angegebenen Mengen als Vereinigung von Intervallen und skizzieren Sie diese.

(1) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < |x| \leq 2\}$, (2) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 5\}$.

3 Lösungstechniken für Gleichungen und Ungleichungen

Ein zentrales Element des Mathematikstudiums ist das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen. Wir werden daher in diesem Kapitel ihr Wissen über Lösungstechniken von bestimmten Gleichungs- und Ungleichungstypen auffrischen.
Wir haben im vorigen Kapitel den Begriff des Definitionsbereiches für Funktionen kennengelernt. Dieses Konzept wird auch hier eine Rolle spielen. Wir betrachten folgende modellhafte Aufgabenstellung:

Beispiel: Bestimmen Sie jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, welches die Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1 \tag{3.1}$$

erfüllt.
Diese Aufgabenstellung enthält zwei Elemente. Die Einschränkung der möglichen x-Werte $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und den mathematischen Ausdruck $\frac{1}{x-1} = 1$. Letzteres für sich genommen, würde keinen Sinn ergeben, denn es ist dort nicht spezifiziert was x überhaupt sein darf. Die Einschränkung $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ geschieht, wie man vermutet, auch nicht grundlos. Schaut man sich die auftretenden Terme in dem Ausdruck $\frac{1}{x-1} = 1$ an, so stellt man fest, dass die rechte Seite für jedes $x \in \mathbb{R}$, die linke Seite aber nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert ist. Schneidet man die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ erhält man die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die linke und die rechte Seite definiert sind. Man könnte $\mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ daher als *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ der Gleichung (3.1) bezeichnen.
Konkret berechnet man die Lösungen der obigen Aufgabe durch die folgenden Umformungen. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\frac{1}{x-1} = 1 \iff 1 = x - 1 \iff 2 = x.$$

Die Menge aller $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ welche (3.1) erfüllen ist also

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid \frac{1}{x-1} = 1\} = \{2\},$$

wobei wir $\mathbb{L}$ als *Lösungsmenge* bezeichnen.

Merke: Eine Gleichung oder Ungleichung macht nur Sinn, wenn die möglichen x-Werte spezifiziert sind. Dies kann man als Analogie zu den Funktionen sehen, da auch diese ohne den Definitionsbereich X keinen Sinn ergeben!

Den obigen Aufgabentyp schreiben wir ab sofort auf folgende Weise:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

3.1 Quadratische Gleichungen

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Unter einer *quadratischen Gleichung* verstehen wir eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ kann man leicht durch *quadratische Ergänzung* bestimmen. Damit meint man die folgende Umformung der linken Seite von Gleichung (3.2)

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \big(x + \frac{p}{2}\big)^2 - \frac{p^2}{4} + q, \tag{3.3}$$

wobei wir bei der letzten Gleichung die 1. binomische Formel verwendet haben.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$x^2 - x - 6 = 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}.$$

Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

und daher

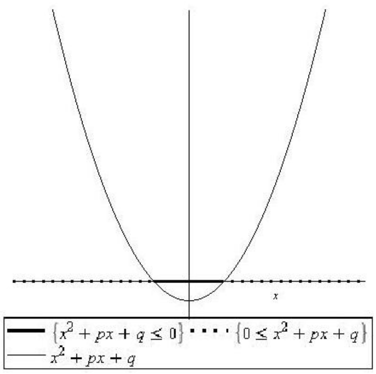
$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2 \ \vee \ x = 3 \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{L} = \{-2, 3\}$.

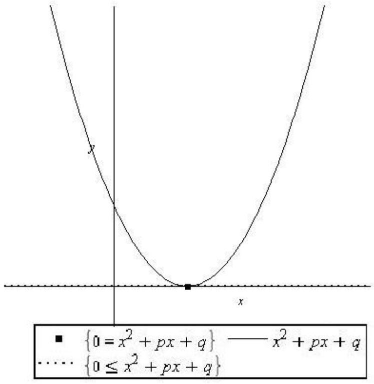
Der soeben beschriebene Algorithmus liefert immer die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer quadratischen Gleichung der Form (3.2).
Aber auch ohne die Lösungsmenge explizit berechnet zu haben, hätten wir schon eine qualitative Aussage über die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ machen können. Definieren wir das Polynom 2-ten Grades

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 + px + q,$$

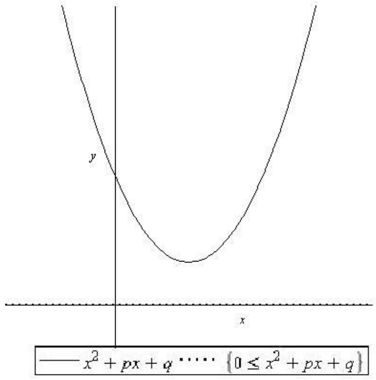
so kann man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von (3.2) als die Nullstellenmenge von f auffassen. Das Schaubild von f liefert eine nach oben geöffnete Parabel und daher kann $\mathbb{L}$ allerhöchstens 2 Elemente besitzen. Dies verdeutlichen die folgenden Schaubilder:



(a) Bild 1



(b) Bild 2



(c) Bild 3

Diese 3 verschiedenen Fälle lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} = \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{p^2}{4} - q < 0,\\
\mathbb{L} \text{ hat genau ein Element} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{p^2}{4} - q = 0,\\
\mathbb{L} \text{ hat genau zwei Elemente} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{p^2}{4} - q > 0.
\end{aligned}$$

3.2 Quadratische Ungleichungen

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Unter einer *quadratischen Ungleichung* verstehen wir eine Ungleichung der Form

$$x^2 + px + q \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ > \\ < \end{matrix} \right\} 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Genau wie bei den quadratischen Gleichungen gibt es auch für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von (3.4) nur 3 Möglichkeiten. $\mathbb{L}$ kann die leere Menge, ein Intervall oder die Vereinigung von zwei disjunkten Intervallen sein. Das kann man sich wieder mit den obigen Schaubildern klarmachen, wobei wir die linke Seite der Ungleichung wieder als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2 + px + q$ interpretieren.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$x^2 - x - 6 > 0, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}.$$

Zuerst bestimmt man jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - x - 6 = 0$. Aus dem Beispiel im vorigen Abschnitt haben wir bereits die Lösungsmenge dieser Gleichung, nämlich $\mathbb{L}_= := \{-2, 3\}$. Insbesondere gilt mittels Faktorisierung für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3).$$

Folglich gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 > 0 &\iff (x + 2)(x - 3) > 0 \\ &\iff (x + 2 < 0 \ \wedge \ x - 3 < 0) \ \vee \ (x + 2 > 0 \ \wedge \ x - 3 > 0) \\ &\iff (x < -2 \ \wedge \ x < 3) \ \vee \ (x > -2 \ \wedge \ x > 3) \\ &\iff (x < -2) \ \vee \ (x > 3). \end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

Dieses Ergebnis lässt sich auch anschaulich begründen. Wie in Bild 1 auf Seite 26 dargestellt, ist das Schaubild der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 - x - 6$$

eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse in den Punkten -2 und 3 schneidet. Gesucht ist nun die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, an welchen die Parabel echt oberhalb der x-Achse liegt. Das entspricht in Bild 1 der gestrichelten Menge. Man sieht:

$$\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty).$$

3.3 Wurzelgleichungen

Eine allgemeingültige Definition einer Wurzelgleichung wollen wir hier nicht geben. Stattdessen zeigen wir das allgemeine Vorgehen bei solchen Gleichungen anhand zweier Beispiele auf. Dabei ist besonders auf den Definitionsbereich zu achten, der hier im allgemeinen nicht mehr $\mathbb{R}$ ist. Vorsicht ist auch bei den folgenden Umformungen geboten, denn es handelt sich nun nicht mehr unbedingt um Äquivalenzumformungen.

Beispiel:

(1) Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16, \qquad \mathbb{D} = [-2, \infty).$$

Für $x \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned} 7 + 3\sqrt{2x+4} = 16 &\iff 3\sqrt{2x+4} = 9 \iff \sqrt{2x+4} = 3 \\ &\implies 2x+4 = 9 \iff x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Von der ersten auf die zweite Zeile haben wir nur einen Implikationspfeil. Da aber $2x + 4 \geq 0$ (wegen $x \in [-2, \infty)$) gilt haben wir auch

$$2x + 4 = 9 \implies \sqrt{2x+4} = 3.$$

Insgesamt gilt daher

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16 \iff x = \frac{5}{2}$$

und damit $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

(2) Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} \ \text{ auf } \ \mathbb{D} = [1, \infty).$$

(i) Bei diesem Beispiel lohnt es sich über die Wahl des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ nachzudenken. $\sqrt{x}$ ist nur für $x \in [0, \infty)$, $\sqrt{x-1}$ nur für $x \in [1, \infty)$ und $\sqrt{2x-1}$ nur für $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$ definiert. Es gilt

$$[0, \infty) \cap [1, \infty) \cap [\frac{1}{2}, \infty) = [1, \infty),$$

und diese Menge wählen wir als $\mathbb{D}$. Für $x < 1$ ist $\sqrt{x-1}$ schon nicht mehr definiert und daher können wir hier $\mathbb{D}$ als maximalen Definitionsbereich der Gleichung interpretieren.

(ii) Für $x \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} &\implies (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 = 2x - 1 \\ &\iff x - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + (x-1) = 2x - 1 \\ &\iff 2\sqrt{x(x-1)} = 0, \\ &\iff x = 1 \ \vee \ x = 0. \end{aligned}$$

Da wir im ersten Schritt nur eine Implikation und keine Äquivalenz haben, ist der Ausdruck $x = 1 \ \vee \ x = 0$ nur notwendige Bedingung an $x \in \mathbb{D}$ eine Lösung der Gleichung zu sein. Diese beiden Möglichkeiten müssen wir nun noch überprüfen. $x = 0$ kann keine Lösung sein, da $0 \notin \mathbb{D}$. Eine Probe für $x = 1$ liefert

$$\sqrt{1} - \sqrt{1-1} = 1 = \sqrt{2 \cdot 1 - 1}.$$

Folglich ist $\mathbb{L} = \{1\}$.

3.4 Bruchungleichungen

Auch in diesem Abschnitt verzichten wir auf eine allgemeine Definition und lassen das Beispiel für sich sprechen. Wir werden nun die Technik der *Fallunterscheidung* kennenlernen. Diese treten auf, da für verschiedene Elemente des Defitionsbereichs der Ungleichung unter Umständen unterschiedliche Vorzeichen im Nenner auftreten. Beim Multiplizieren einer Ungleichung mit einer Zahl spielt das Vorzeichen aber eine entscheidende Rolle.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\frac{2x+1}{x-3} < 1, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Für $x \in (-\infty, 3)$ ist $x - 3 < 0$ und für $x \in (3, \infty)$ ist $x - 3 > 0$. Daher unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1: Sei $x \in (3, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\frac{2x+1}{x-3} < 1) \ \wedge \ (x > 3) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2x + 1 < x - 3) \ \wedge \ (x > 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x < -4) \ \wedge \ (x > 3)
\end{aligned}$$

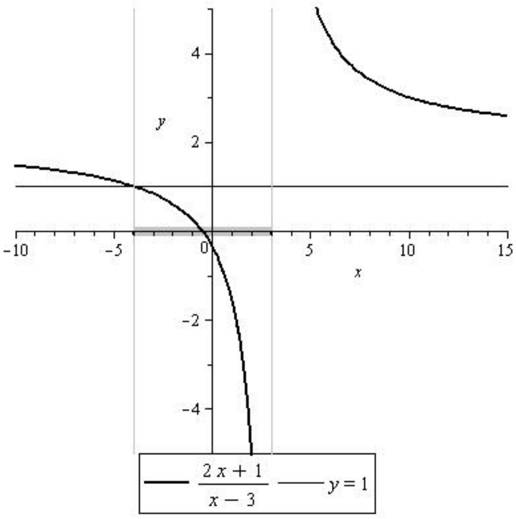
Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche die letzte Aussage erfüllen ist offensichtlich $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

Fall 2: Sei $x \in (-\infty, 3)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\frac{2x+1}{x-3} < 1) \ \wedge \ (x < 3) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2x + 1 > x - 3) \ \wedge \ (x < 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x > -4) \ \wedge \ (x < 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in (-4, 3) =: \mathbb{L}_2.
\end{aligned}$$

Für die Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L} \cap \mathbb{D} \\ &= (\mathbb{L} \cap (3, \infty)) \;\cup\; (\mathbb{L} \cap (-\infty, 3)) \\ &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-4, 3). \end{aligned}$$



3.5 Betragsungleichungen

Wir haben im vorigen Abschnitt die Fallunterscheidung kennengelernt. Mit diesem Hilfsmittel lassen sich auch Ungleichungen in denen Beträge vorkommen bearbeiten.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge von

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}. \tag{3.5}$$

Da wir aber nun in Abhängigkeit von x im Zähler und Nenner variierende Vorzeichen haben, reichen 2 Fallunterscheidungen wie im vorigen Abschnitt nicht mehr aus. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}.$$

Daher bieten sich die folgenden Fallunterscheidungen an:

Fall 1: Sei $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1\right) \wedge \left(x < -\frac{1}{2}\right) &\iff (-2x - 1 \geq x - 3) \wedge \left(x < -\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \left(x \leq \frac{2}{3}\right) \wedge \left(x < -\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) =: \mathbb{L}_1. \end{aligned}$$

Fall 2: Sei $x \in [-\frac{1}{2}, 3)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1) \ \wedge \ (x \in [-\frac{1}{2}, 3)) &\iff (2x+1 \geq x-3) \ \wedge \ (x \in [-\frac{1}{2}, 3)) \\
&\iff (x \geq -4) \ \wedge \ (x \in [-\frac{1}{2}, 3)) \\
&\iff x \in [-\frac{1}{2}, 3) =: \mathbb{L}_2.
\end{aligned}$$

Fall 3: Sei $x \in (3, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1) \ \wedge \ (x > 3) &\iff (2x+1 \leq x-3) \ \wedge \ (x > 3) \\
&\iff (x \leq -4) \ \wedge \ (x > 3).
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage wird von keiner reellen Zahl erfüllt und damit $\mathbb{L}_3 = \emptyset$.

Insgesamt gilt

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-\infty, 3).$$

4 Reelle Funktionen II

Wir haben am Anfang des zweiten Kapitels den Begriff der Funktion kennengelernt und erste grundlegende Konzepte und Definitionen eingeführt. Wir wollen dies in diesem Kapitel fortführen, beschränken uns aber auch hier auf die Behandlung von reellen Funktionen $f : X \to Y$, also $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

4.1 Verkettung von Funktionen

Definition 4.1.1 (*Verkettung von Funktionen*)
Es seien $f : X_2 \to Y_2$ und $g : X_1 \to Y_1$. Dann wird die **Verkettung oder Hintereinanderausführung von** f **und** g *definiert als*

$$f \circ g : D \to Y_2, \quad x \mapsto f(g(x)) \quad \textit{mit} \quad D = \{x \in X_1 \mid g(x) \in X_2\} \subseteq X_1.$$

Man sagt auch kurz "f nach g" oder "f Kringel g".

Im Fall, dass $g(X_1) \cap X_2 = \emptyset$ ist, wäre $D = \emptyset$. So eine Funktion $f \circ g : \emptyset \to Y_2$ nennt man **leere Funktion**, sie ist in der Mathematik meist von geringem Interesse.

(1) Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4 - x^2 \quad \text{und} \quad g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Wir bestimmen die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und ihre jeweiligen Definitionsbereiche.

(i) Wir behandeln zuerst $f \circ g$. Es gilt

$$D = \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty),$$

und für alle $x \in [0, \infty)$ gilt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x.$$

(ii) Für $g \circ f$ gilt

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2],$$

und für alle $x \in [-2, 2]$ gilt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2}.$$

(2) Es sei die Funktion

$$f : (-1, 2) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log(-x^2 + x + 2)$$

gegeben und wir wollen das Bild $f((-1, 2))$ bestimmen. Dazu ist es hilfreich die Funktion f als Verkettung von zwei einfacheren Funktionen g und h zu schreiben. Diese wählen wir als

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x) \;\text{ und }\; h : (-1, 2) \to (0, \infty), \quad x \mapsto -x^2 + x + 2.$$

Beachtung verdient hierbei, dass $(-1, 2)$ genau das Intervall ist, auf dem die Funktion h echt größer als 0 ist, d.h. $h((-1, 2)) \subseteq (0, \infty)$. Die Hintereinanderausführung ist also sinnvoll definiert.
Per Definition gilt

$$f(D) = (g \circ h)(D) = g(h(D)).$$

Daher bestimmen wir zuerst $h(D)$. Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir jedes $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = -x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -\big[(x - 1/2)^2 - 1/4 - 2\big] = 9/4 - (x - 1/2)^2$$

und hieraus können wir ablesen, dass

$$h(D) = \{h(x) \mid x \in D\} = \{h(x) \mid x \in (-1, 2)\} = (0, \frac{9}{4}].$$

Wir erhalten ferner, dass

$$g(h(D)) = g\big((0, \frac{9}{4}]\big) = \big(-\infty, \log(\frac{9}{4})\big].$$

Um die letzte Gleichheit wirklich zu beweisen, fehlen uns momentan schlichtweg die Mittel, bzw. die richtigen Konzepte. Anschaulich wird man durch einen Blick auf das Schaubild des Logarithmus (siehe Seite 42) diese Gleichung allerdings sehr gut nachvollziehen können.

(3) Es sei $X := (-\infty, -1] \,\cup\, (0, \infty)$ und die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

gegeben. Wie zuvor werden wir durch geeignete Aufspaltung der Funktion f das Bild $f(X)$ berechnen. Dazu seien

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \;\text{ und }\; g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Dann gilt

$$D := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid h(x) \in [0, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{x} \geq -1\} = X$$

und für $x \in X$ gilt

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(1 + \frac{1}{x}) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = f(x).$$

Also stimmt die Funktion $g \circ h : X \to \mathbb{R}$ mit f überein. Insbesondere gilt daher

$$f(X) = (g \circ h)(X) = g(h(X)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h(X) &= \{h(x) \mid x \in (-\infty, -1] \cup (0, \infty)\} \\ &= \{h(x) \mid x \in (-\infty, -1]\} \cup \{h(x) \mid x \in (0, \infty)\} = [0, 1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} f(X) &= g([0, 1) \cup (1, \infty)) = g([0, 1)) \cup g((1, \infty)) \\ &= [0, 1) \cup (1, \infty) = [0, \infty) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

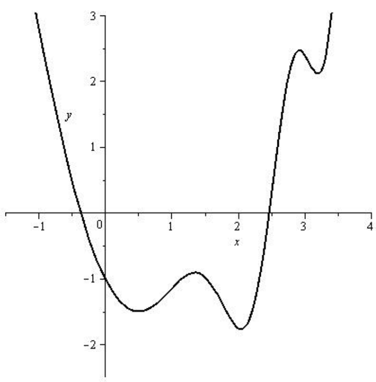
4.2 Der Graph einer reellen Funktion

Definition 4.2.1 (*Der Graph einer reellen Funktion)*
Es sei $f : X \to Y$ eine reelle Funktion. Dann nennt man die Menge

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

den **Graph von** f.

Graph(f) ist also eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (kurz $\mathbb{R}^2$), deren Namen wohlverdient ist. Skizziert man nämlich Graph(f), so könnte das zum Beispiel wie nebenstehend aussehen.
Nun ist es nicht nur der Graph selbst, den wir in diesem Abschnitt weiter behandeln wollen, sondern (unter anderem) bestimmte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ die strukturell Definition (4.1) ähneln. Zum Beispiel könnte man in (4.1) die Bedingung $y = f(x)$ durch $y > f(x)$ ersetzen, also



$$G_> := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \ y > f(x)\}.$$

Anschaulich ist dies die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die über dem Graph von f liegen.

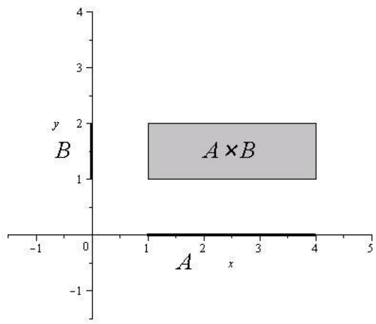
Aus Gründen, die wir hier nicht weiter erläutern können, sind Mengen von der Bauart $G_>$ besonders gut zu handhaben. Daher ist man bei einer beliebig gegebenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oft daran interessiert eine Definition dieser Art zu finden.
Wir werden nun unter anderem verschiedene Mengen untersuchen und diese in eine Form bringen, die in Relation zum Graph einer reellen Funktion steht.

Beispiele:

(1) Wir haben in Kapitel 1 das kartesische Produkt zweier Mengen kennengelernt. Bildet man das Kreuzprodukt von zwei Intervallen $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, so ist

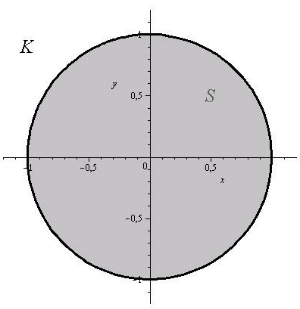
$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$$

unter der Voraussetzung, dass A und B nicht entartet sind, anschaulich gesprochen ein Quader. Skizziert man zum Beispiel $A \times B$ für $A = [1, 4]$ und $B = [1, 2]$, erhält man das nebenstehende Schaubild.



(2) Die Mengen

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{und} \quad K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



bezeichnet man als *Kreisring* bzw. *Kreisscheibe* mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$.
Wir können natürlich auch Kreislinien bzw. Kreisscheiben mit beliebigem Mittelpunkt und Radius in dieser Form darstellen. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Dann lautet die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad x, y, \in \mathbb{R}$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung, also die Menge

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

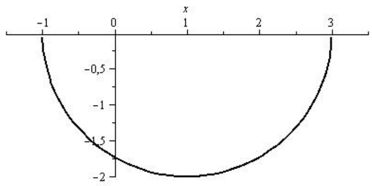
beschreibt einen Kreis in $\mathbb{R}^2$ um (x_0, y_0) mit Radius r. Durch Umformung sieht man, dass der Kreis sich aus den Graphen der Funktionen

$$f_1 : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \qquad \text{(oberer Halbkreis)}$$

und

$$f_2 : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \qquad \text{(unterer Halbkreis)}$$

zusammensetzt. Mit den obigen Überlegungen erkennt man, dass der resultierende Kreis aus einer Verschiebung um x_0 „nach rechts“ und y_0 „nach oben“ aus dem Kreis um $(0,0)$ mit Radius r hervorgegangen ist.
Rechts findet man eine Skizze der Funktion

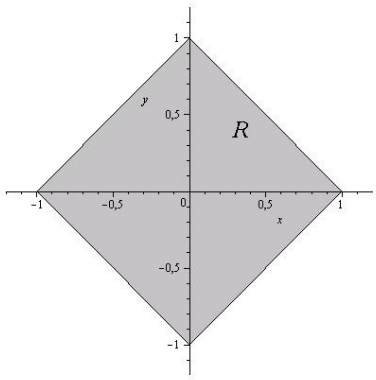


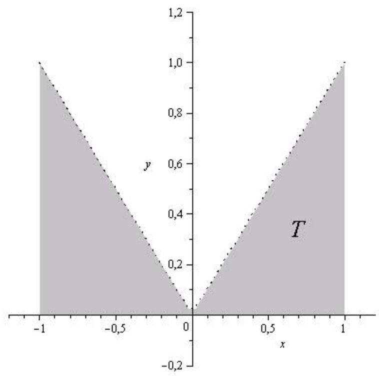
$$f_2 : [-1,3] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto -\sqrt{4-(x-1)^2}.$$

(3) Skizziert man die Mengen

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\} \text{ und } T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, x^2 - y^2 > 0\}$$

erhält man





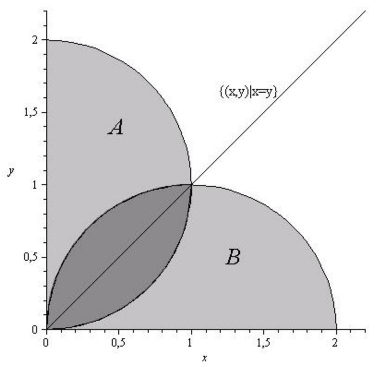
(4) Skizziert man die Mengen

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y-1)^2 + x^2 \leq 1, \ x \geq 0\}$$

und

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}$$

erhält man das Schaubild rechts. Wie man sieht entsteht B wenn man die Menge A an der Achse $x = y$ spiegelt. Treten in der Definition einer Menge zwei Variablen auf, so würde sich dieser Effekt immer einstellen, wenn man in der Definition die beiden Variablen vertauscht, wie wir es bei A und B getan haben.



(5) Es sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - |x-1| < 1\}$ und wir sind an einer einfacheren Darstellung von M interessiert. Dazu müssen wir die Bedingung $2y - |x-1| < 1$

genauer untersuchen. Diese lässt sich wie in Kapitel 3 durch auflösen des Betrags mittels einer Fallunterscheidung behandeln.

Fall 1: Es sei $x \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2y - |x-1| < 1) \ \wedge \ (x \geq 1) &\iff (2y - (x-1) < 1) \ \wedge \ (x \geq 1)\\ &\iff (y < \frac{x}{2}) \ \wedge \ (x \geq 1)\end{aligned}$$

und wir definieren $\mathbb{L}_1 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, \ y < \frac{x}{2}\}$.

Fall 2: Es sei $x \in (-\infty, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2y - |x-1| < 1) \ \wedge \ (x < 1) &\iff (2y + (x-1) < 1) \ \wedge (x < 1)\\ &\iff (y < 1 - \frac{x}{2}) \ \wedge \ (x < 1)\end{aligned}$$

und wir definieren $\mathbb{L}_2 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1, \ y < 1 - \frac{x}{2}\}$.

Insgesamt ist dann

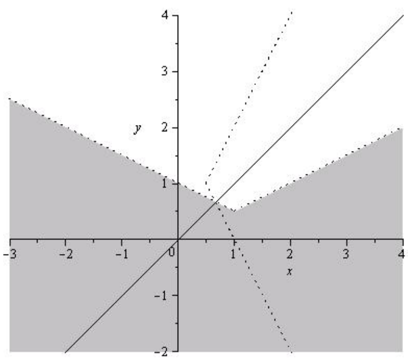
$$M = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2.$$

Bei diesem Beispiel könnte man auch obige Überlegung über das „Vertauschen“ von x und y anwenden. Es gilt

$$2y - |x-1| < 1 \iff y < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x-1|.$$

Vertauschen wir hier x und y, so erhalten wir

$$x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|y-1|.$$



Die zugehörige Lösungsmenge lässt sich wie nebenstehend skizzieren. Spiegeln an der Geraden $x = y$ liefert dann die Skizze der ursprünglich gesuchten Menge.

Wir wollen uns nun verschiedenen Manipulationen von Graphen widmen, wie Verschieben, Spiegeln, Strecken oder Stauchen. Dieses wird durch besonders einfache Verkettungen bewirkt, auch wenn diese der Einfachheit halber nicht mehr explizit aufgeschrieben werden. Die Betrachtung dieser Verkettungen erlaubt einem häufig, auf einfache Weise den Graphen der resultierenden Funktion f zu zeichnen oder die Bildmenge zu bestimmen.

Beispiel: Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto -x^2 + x + 2$$

gegeben. Es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -\big[(x - 1/2)^2 - 1/4 - 2\big] = -\big[(x - 1/2)^2 - 9/4\big].$$

Der Graph von f entsteht nun aus dem Graphen der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$

durch Verschieben um $1/2$ nach rechts, Verschieben um $-9/4$ nach unten und Spiegelung an der x-Achse. Genauer gilt $f = f_2 \circ g \circ f_1$ mit den Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1/2 \ \text{ und } \ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto -(y - 9/4).$$

Dann gilt

$$f(\mathbb{R}) = f_2(g(f_1(D))) = f_2(g(\mathbb{R})) = f_2([0, \infty)) = (-\infty, \frac{9}{4}].$$

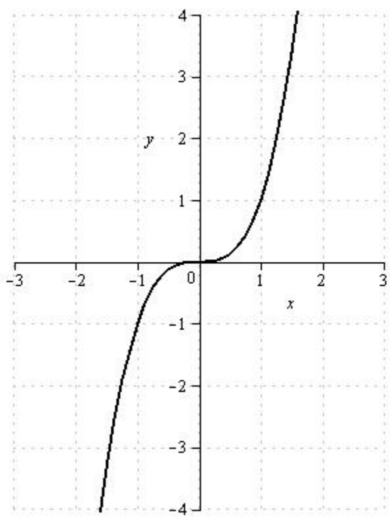
Wir betrachten nun eine allgemeinere Situation: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto c \cdot g\big(b(x + a)\big) + d.$$

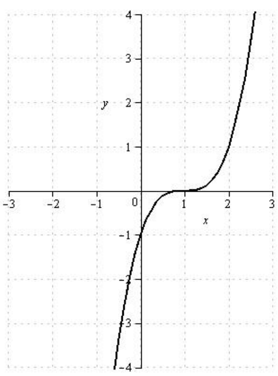
Im Folgenden werden wir alle Schritte anhand der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^3$$

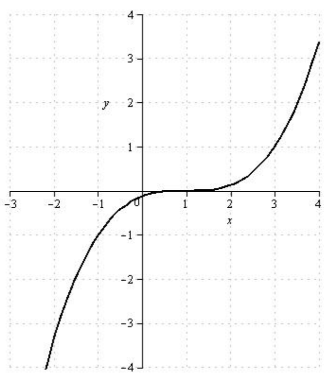
illustrieren welche man rechts skizziert findet. In Bezug auf den Graphen von f bewirkt (Fortsetzung nächste Seite)



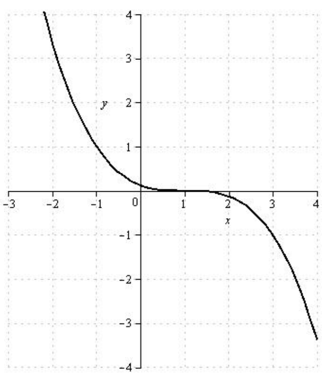
- a eine Verschiebung des Graphen von g um $-a$ entlang der x-Achse,
- für $b > 0$ eine $1/b$-fache Streckung in Richtung der x-Achse (für $b > 1$ wird der Graph also gestaucht),
- ein Vorzeichenwechsel bei b eine Spiegelung an der Achse $x = -a$,



(a) $a = -1,\ b = c = 1,$ $d = 0.$

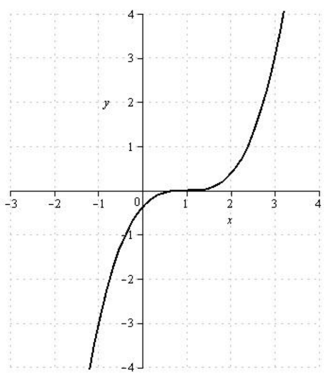


(b) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $d = 0$.

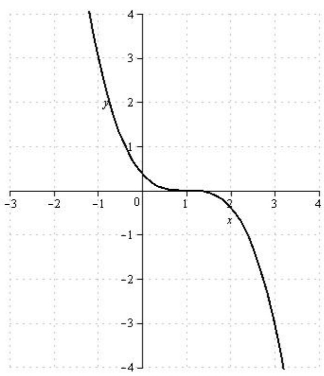


(c) $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1$, $d = 0$.

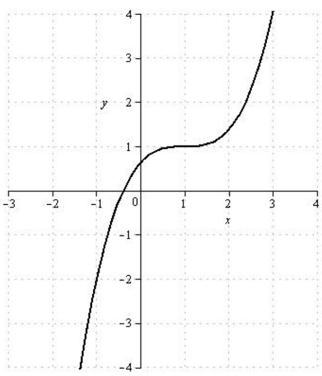
- c für $c > 0$ eine c-fache Streckung in Richtung der y-Achse,
- ein Vorzeichenwechsel bei c eine Spiegelung an der x-Achse,
- d eine Verschiebung des Graphen um d in Richtung der y-Achse.



(a) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 3$, $d = 0$.



(b) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -3$, $d = 0$.



(c) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 3$, $d = 1$.

4.3 Eigenschaften von reellen Funktionen

4.3.1 Monotonie

Definition 4.3.1 (*Monotonie*)
Es sei $f : X \to Y$ eine reelle Funktion.

(a) *f heißt* **monoton wachsend (bzw. monoton fallend)**, *falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt*
$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad \textit{bzw.} \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

(b) *f heißt* **streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend)**, *falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt*
$$f(x_1) < f(x_2), \quad \textit{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Beispiele:

(1) Es sei die Funktion
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$
gegeben.

Behauptung: f ist streng monoton wachsend.

Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt $x_2 - x_1 > 0$ und $0 < x_2 \leq x_2 + x_1$. Folglich
$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0} > 0 \iff f(x_1) < f(x_2).$$
□

(2) Es sei die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$
gegeben.

Behauptung: f ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.

Beweis: Es gilt $-1 < 0$ und
$$f(-1) = 1 > 0 = f(0),$$

also ist f nicht monoton wachsend. Außerdem ist $0 < 1$ und

$$f(0) = 0 < f(1)$$

und somit ist f auch nicht monoton fallend. $\square$

(3) Es sei die Wurzelfunktion

$$w_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

gegeben.

Behauptung: w_2 ist streng monoton wachsend.

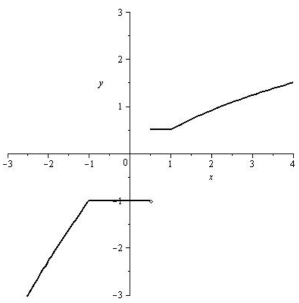
Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \geq \sqrt{x_2} > 0$$

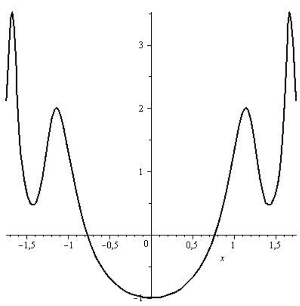
und damit

$$w_2(x_2) - w_2(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0,$$

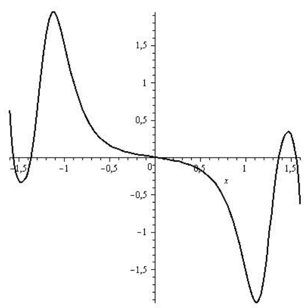
was äquivalent zu $w_2(x_1) < w_2(x_2)$ ist. $\square$



(a) monoton wachsende Funktion



(b) gerade Funktion



(c) ungerade Funktion

4.3.2 Gerade und ungerade Funktionen

Definition 4.3.2 (*Gerade und ungerade Funktion*)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade** *(oder* **symmetrisch***), bzw.* **ungerade** *(oder* **antisymmetrisch***), wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f(-x) = f(x) \quad bzw. \quad f(-x) = -f(x).$$

Beispiele:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ ist eine gerade Funktion.

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ ist eine ungerade Funktion.

4.4 Die Umkehrfunktion

Dieser Abschnitt ist der Berechnung von Umkehrfunktionen gewidmet. Aber im allgemeinen hat nicht jede Funktion eine Umkehrfunktion. Die zentrale Eigenschaft um die Existenz einer Umkehrfunktion sicherzustellen ist

Definition 4.4.1 (*Injektivität*)
Es sei $f : X \to Y$ eine reelle Funktion. Gilt für jedes $x_1, x_2 \in X$, dass

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

so heißt die Funktion **injektiv**.

Anschaulich bedeutet Injektivität einer Funktion, dass es zu jedem $y \in f(X)$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Es gibt also in X keine zwei Elemente, die durch die Funktion f auf das gleiche Element in $f(X)$ abgebildet werden. Dies ermöglicht

Definition 4.4.2 (*Umkehrfunktion*)
Sei $f : X \to Y$ eine injektive Funktion. Dann heißt

$$f^{-1} : f(X) \to X, \qquad y \mapsto x,$$

wobei x das eindeutige Element aus X mit $f(x) = y$ ist, die **Umkehrfunktion** *von f.*

Aus dieser Definition kann man leicht folgern, dass für alle $x \in X$ und $y \in f(X)$ gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \ \text{ und } \ f(f^{-1}(y)) = y.$$

Anhand einiger Beispiele werden wir weiter unten einsehen, dass die Graphen von f und f^{-1} symmetrisch zur Geraden $y = x$ liegen.

Beispiele:

(1) Streng monotone Funktionen sind immer injektiv und besitzen somit auch immer eine Umkehrfunktionen.

(2) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, denn es gilt

$$f(1) = 1 = (-1)^2 = f(-1),$$

aber $1 \neq -1$.

(3) Es sei $b > 0$.

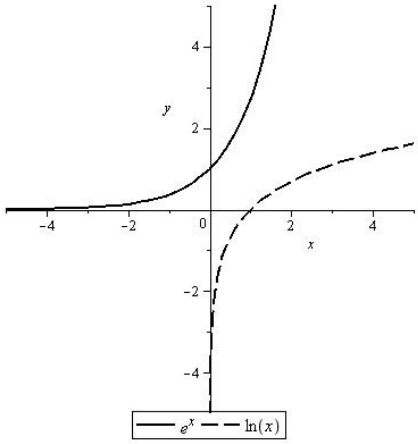
Die Umkehrfunktion der Exponentialabbildung zur Basis b

$$\exp_b : \mathbb{R} \to (0, \infty), \qquad x \mapsto b^x$$

ist die Logarithmusfunktion zur Basis b

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_b(x).$$

Die Skizze zeigt die Graphen der Funktionen der Exponentialabbildung und der natürlichen Logarithmusfunktion.



(4) Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

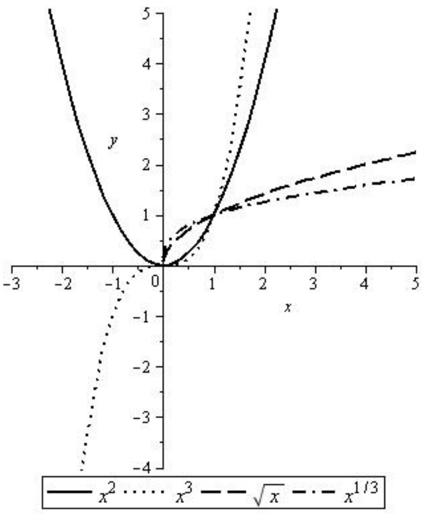
Dann ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^n$$

injektiv und die Umkehrfunktion gegeben durch

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Beide Schaubilder rechts zeigen, dass der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Achse $x = y$ entsteht.



(5) Wir zeigen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

injektiv ist, berechnen die Umkehrfunktion und skizzieren jeweils den Graphen. Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt

$$\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = f(x_1) = f(x_2) = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} \iff (x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_2 - 1)(x_1 + 1).$$

Folglich

$$x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 = (x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_2 - 1)(x_1 + 1) = x_2x_1 - x_1 + x_2 - 1.$$

und daraus erhalten wir schließlich

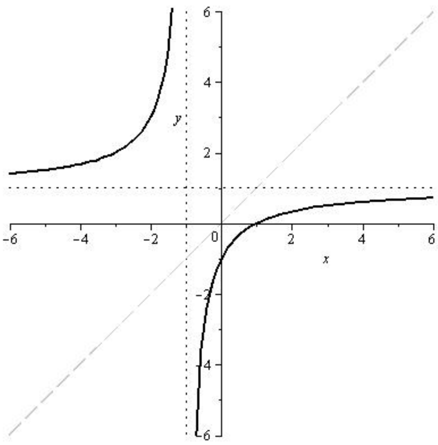
$$-x_2 + x_1 = -x_1 + x_2 \implies 2x_1 = 2x_2 \implies x_1 = x_2.$$

Also ist f injektiv. Ferner ist $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, denn für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ und die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := -\frac{2}{x+1}$ erfüllt $g(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Kommen wir nun zur Berechnung der Umkehrfunktion. Diese erhält man durch Auflösen der Gleichung $y = \frac{x-1}{x+1}$ für $y \in f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ nach x. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt

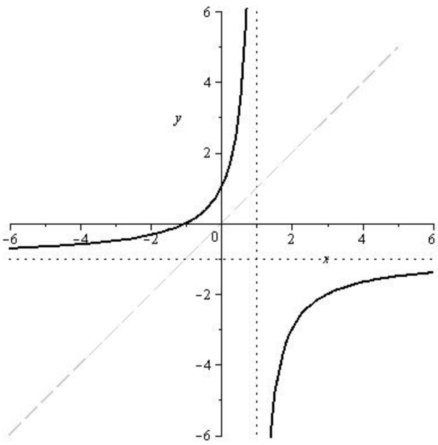
$$\begin{aligned} y = \frac{x-1}{x+1} \iff (x+1)y = x - 1 &\iff xy - x + y = -1 \\ \iff x(y-1) = -y - 1 &\overset{y \neq 1}{\iff} x = -\left(\frac{y+1}{y-1}\right). \end{aligned}$$

Um die Umkehrfunktion f^{-1} zu bestimmen, muss man sich klarmachen, dass das obige y die Variable sein soll und man daher in der letzten Gleichung x und y vertauschen muss. Wir erhalten also

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \qquad x \mapsto -\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$



Graph der Funktion f



Graph der Funktion f^{-1}

(6) Es sei $a \in (0, \infty)$, $X = [0, \infty)$ und die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{a + \sqrt{x}}$$

gegeben, wobei $f([0, \infty)) = (0, 1/a]$. Wir zeigen zuerst wieder Injektivität von f. Es sei $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt

$$f(x_1) = f(x_2) \iff a + \sqrt{x_1} = a + \sqrt{x_2} \iff \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \implies x_1 = x_2,$$

wobei wir in der letzten Implikation die Injektivität der Wurzelfunktion auf $[0, \infty)$ ausgenutzt haben. Die Umkehrfunktion berechnen wir wie zuvor. Für $x \in X$ gilt

$$y = \frac{1}{a + \sqrt{x}} \iff a + \sqrt{x} = \frac{1}{y} \iff \sqrt{x} = \frac{1}{y} - a \overset{x \geq 0}{\iff} x = \left(\frac{1}{y} - a\right)^2$$

Damit ergibt sich

$$f^{-1} : f(X) \to X, \qquad x \mapsto \left(\frac{1}{x} - a\right)^2.$$

5 Spezielle Funktionen

5.1 Allgemeine (affin-)lineare Funktionen

Definition 5.1.1 (*Linearität*)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt linear, wenn für jedes* $x_1, x_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$f(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1f(x_1) + c_2f(x_2).$$

Beispiel: Es sei $b \in \mathbb{R}$ fest. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto bx$ ist linear und der Graph dieser Funktion ist eine Gerade mit Steigung b und enthält den Punkt $(0, 0)$. Die Linearität wollen wir nun beweisen.

Behauptung: f ist linear.

Beweis: Es seien $x_1, x_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(c_1x_1 + c_2x_2) = b(c_1x_1 + c_2x_2) = bc_1x_1 + bc_2x_2 = c_1bx_1 + c_2bx_2 = c_1f(x_1) + c_2f(x_2).$$

□

Definition 5.1.2 (*Allgemeine affin-lineare Funktion*)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. *Eine Funktion der Form* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $x \mapsto a + bx$ *heißt* **affin-linear** *oder* **allgemein affin-lineare Funktion**.

Bemerkung: Im Fall $a \neq 0$ ist die affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a + bx$ nicht linear, denn für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x_1 + x_2) = a + b(x_1 + x_2) \neq 2a + b(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Beispiel:

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a+bx$ für die angegebenen Werte von $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $a = 1,\ b = 0$ (2) $a = -1,\ b = -\frac{1}{2}$

Auch bei diesen Graphen handelt es sich jeweils um eine Gerade, aber jetzt schneidet der Graph die x-Achse nicht mehr in $(0, 0)$, sondern jeweils in $(0, a)$. Mit allgemeinen affin-linearen Funktionen lassen sich zum Beispiel Funktionen in denen Beträge vorkommen in eine einfachere Form bringen.

Beispiel: Wir schreiben die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2 - |1 - x| - |x + 2|$$

ohne Beträge, indem wir sie auf geeigneten Intervallen als affin-lineare Funktionen schreiben und skizzieren ihren Graphen.
Wie in Kapitel 3 lösen wir den Betrag durch Fallunterscheidungen auf.

Fall 1: Sei $x \in (-\infty, -2)$. Dann gilt

$$f(x) \quad = \quad 2 - |1 - x| - |x + 2| = 2 - (1 - x) + (x + 2) = 3 + 2x.$$

Fall 2: Sei $x \in [-2, 1)$ Dann gilt

$$f(x) \quad = \quad 2 - (1 - x) - (x + 2) = -1.$$

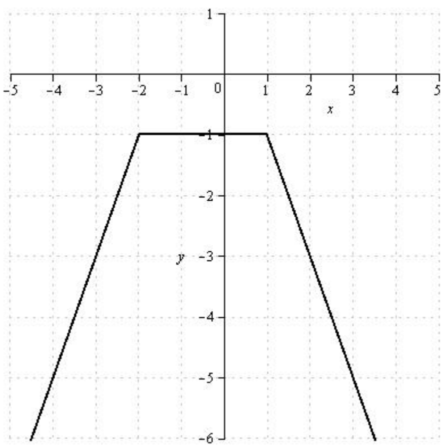
Fall 3: Sei $x \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$f(x) \quad = \quad 2 + (1 - x) - (x + 2) = 1 - 2x.$$

Insgesamt kann man f also auch so schreiben:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 3 + 2x, & x \in (-\infty, -2), \\ -1, & x \in [-2, 1), \\ 1 - 2x, & x \in [1, \infty). \end{cases} \quad .$$

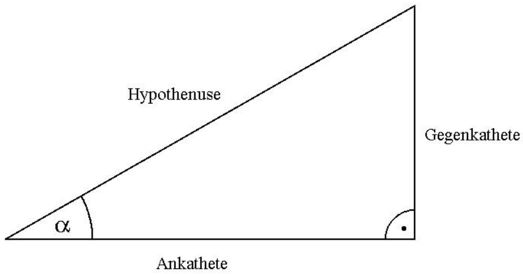
Rechts ist der Graph von f skizziert.



5.2 Trigonometrische Funktionen

Für ein rechtwinkliges Dreieck gelten die Definitionen

$$\sin(\alpha) := \text{Gegenkathete/Hypotenuse},$$
$$\cos(\alpha) := \text{Ankathete/Hypotenuse},$$
$$\tan(\alpha) := \text{Gegenkathete/Ankathete}.$$



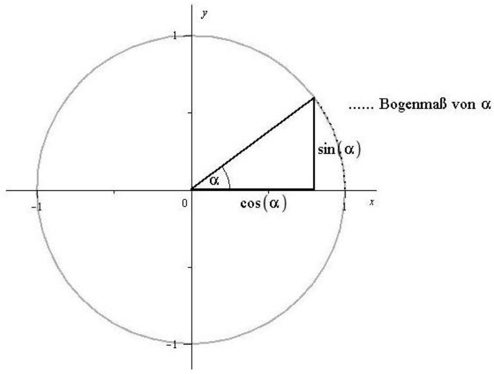
Diese Definition ist allerdings nur für $\alpha < 90°$ möglich. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist die Definition des Sinus, Cosinus und Tangens als reelle Funktionen, insbesondere mit Definitionbereich $\mathbb{R}$. Dabei sollen diese Funktionen mit der obigen Definition auf einer bestimmten Teilmenge von $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

5.2.1 Sinus und Cosinus

Es bietet sich an, zuerst die Begriffe *Gradmaß* und *Bogenmaß* einzuführen. Es sei

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

der Kreisring in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$. Sei nun $(x, y) \in S$ ein Punkt auf dem Kreisring und $L(x, y)$ die Strecke zwischen (x, y) und $(0, 0)$. Den Winkel, den $L(x, y)$ mit dem positiven Teil der x-Achse einschließt, bezeichnen wir mit α und nennen dies das **Gradmaß** von (x, y). Messen wir nun die Strecke, welche durchlaufen wird, wenn man $(1, 0)$ und (x, y) gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreisring verbindet, so erhalten wir eine Zahl $b \in [0, 2\pi)$ (der Kreisumfang ist per Definition 2π), welche wir das **Bogenmaß** des Punktes (x, y) nennen.



Zum Beispiel ist für $(-1, 0)$ das Gradmaß $\alpha = 180°$ und das Bogenmaß $b = \pi$. Auf diese Weise lässt sich jedes Element aus S durch Gradmaß und Bogenmaß ausdrücken. Dies legt Nahe, dass wir auch Gradmaß und Bogenmaß ineinander umrechnen können. In der Tat haben wir die Korrelationen

$$\alpha = \frac{180}{\pi} b \quad \text{und} \quad b = \frac{\pi}{180} \alpha.$$

Wir werden ab sofort nur noch in Bogenmaß rechnen. Es sei $b \in [0, 2\pi)$ und (x, y) der Punkt auf S mit Bogenmaß b. Wir setzen

$$\cos(b) := x \quad \text{und} \quad \sin(b) := y.$$

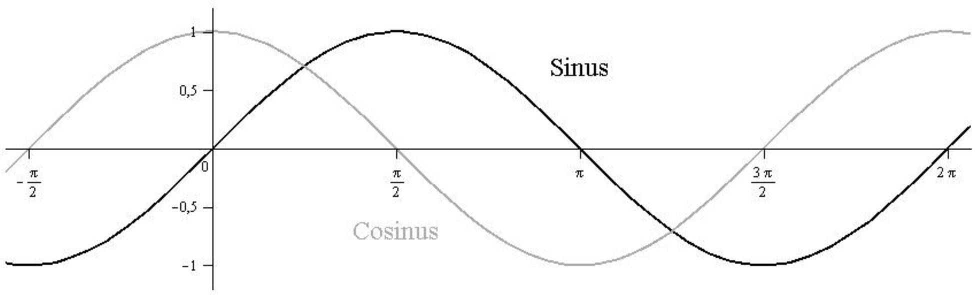
und definieren die Funktionen $\tilde{\cos} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ und $\tilde{\sin} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ durch

$$b \mapsto \cos(b) \quad \text{und} \quad b \mapsto \sin(b)$$

wobei offensichtlich $\tilde{\sin}([0, 2\pi)) = \tilde{\cos}([0, 2\pi)) \subseteq [-1, 1]$ gilt. Mit der Einsicht, dass $b = 0$ mit $b = 2\pi$ identifiziert werden kann, da in beiden Fällen der Punkt $(x, y) = (1, 0)$ zugeordnet ist, setzen wir beide Funktionen auf die folgende Art periodisch fort: Es sei $b \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi)$. Dann existieren genau ein $\tilde{b} \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $b = \tilde{b} + 2\pi k$ und wir definieren

$$\cos(b) := \cos(\tilde{b}) \qquad \text{und} \qquad \sin(b) = \sin(\tilde{b}).$$

Insgesamt haben wir damit die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definiert, welche wir **Sinus** und **Cosinus** nennen. Skizziert man den Graphen, erhält man



Per Definition sind die Funktionen periodisch mit Periode 2π, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k) \quad \text{und} \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi k).$$

Weiterhin ist anhand der Definition und der obigen Skizzen zumindest anschaulich klar, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \text{und} \quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x).$$

Um einiges überraschender sind die überaus praktischen *Additionstheoreme*, welche besagen, dass für jedes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\qquad \sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2),$

(b) $\qquad \cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2).$

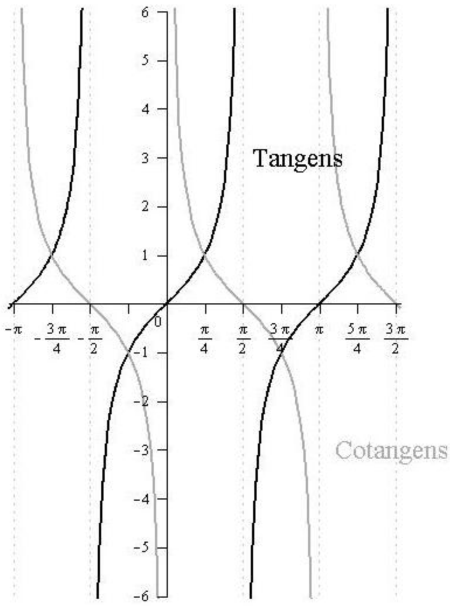
Weiterhin interessant sind die Nullstellen des Sinus und Cosinus. Es gilt

$$\sin(x) = 0 \iff \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \pi k$$

und

$$\cos(x) = 0 \iff \text{es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \pi k + \frac{\pi}{2}.$$

5.2.2 Tangens und Cotangens



Die Funktion $\tan : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

mit

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$$

heißt **Tangens**. Analog definiert man den **Cotangens** durch $\cot : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

und

$$X = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}.$$

Die Funktionen tan und cot sind ebenfalls periodisch, aber mit Periode π. Es gilt also für jedes x aus dem jeweiligen Definitionsbereich und $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi) \quad \text{und} \quad \cot(x) = \cot(x + k\pi).$$

Bemerkung: Einige Funktionswerte des Sinus, Cosinus und Tangens sind durch folgende Tabelle gegeben.

x in °	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	–

Beispiel: Mithilfe der Additionstheoreme bestimmen wir $\sin(\frac{\pi}{12})$ und $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Zuerst schreiben wir

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Wir quadrieren beide Seiten und erhalten

$$\frac{1}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right).$$

Definieren wir $y := \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)^2$, so finden wir mithilfe der pq-Formel

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Genauso gilt für $z := \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ die Gleichung $\frac{1}{16} = z(1-z)$. An dem Graphen von Sinus und Cosinus lesen zudem wir $0 < \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ab, weshalb

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

gelten müssen. Damit erhalten wir das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \overset{!}{=} \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}},\\
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \overset{!}{=} \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

6 Polynomdivision, Partialbruchzerlegung

Dieses Kapitel wurde im Wintersemester 2020/2021 von Sebastian Ohrem ergänzt.

6.1 Polynomdivision

Bei der schriftlichen Division hat man zwei ganze Zahlen $P, Q \in \mathbb{Z}$ und sucht eine Darstellung $P = S \cdot Q + R$ mit weiteren ganzen Zahlen $S, R \in \mathbb{Z}$ so, dass der Rest R möglichst klein ist. Ganz ähnlich ist das bei der Polynomdivision:

Hier sind zwei Polynomfunktionen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $Q \neq 0$. Die Polynomdivision, die wir im Folgenden an Beispielen illustrieren, liefert weitere Polynomfunktionen $S, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass gelten:

1. $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Der Grad von R ist echt kleiner als der Grad von Q.

Die Funktionen S und R existieren und sind durch diese beiden Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Polynomfunktionen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$P(x) = x^3 + x^2 - 9x + 4 \quad \text{und} \quad Q(x) = x - 1$$

Wir schauen zuerst den führenden Term von P an (das ist x^3) und bestimmen ein Vielfaches von Q, das denselben führenden Term hat. Hier ist $x^2 \cdot Q(x) = x^3 - x^2$ so ein Vielfaches. Dieses Vielfache ziehen wir nun ab:

$$P(x) - x^2 Q(x) = (x^3 + x^2 - 9x + 4) - (x^3 - x^2) = 2x^2 - 9x + 4.$$

Mit dem Ergebnis machen wir dasselbe, d.h. wir suchen ein Vielfaches von Q mit führendem Term $2x^2$. Es bietet sich $2xQ(x) = 2x^2 - 2x$ an. Wieder subtrahieren wir:

$$(2x^2 - 9x + 4) - (2x^2 - 2x) = -7x + 4$$

Das Spielchen machen wir noch ein letztes mal, wir nehmen diesmal $-7Q(x) = -7x+7$ als Vielfaches. Die Differenz ist:

$$-7x + 4 - (-7x+7) = -3$$

Dabei ist der Grad der rechten Seite 0 und damit echt kleiner als der Grad von Q, der 1 ist. Dass wir hier das richtige gemacht haben, sieht man an der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} -3 &= -7x + 4 - (-7)Q(x) \\ &= 2x^2 - 9x + 4 - (2x-7)Q(x) \\ &= x^3 + x^2 - 9x + 4 - (x^2+2x-7)Q(x) \\ \iff P(x) &= (x^2+2x-7)Q(x) - 3 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist dann $R(x) = -3$ und $S(x) = x^2 + 2x - 7$. Üblich ist es, diese Polynomdivision in einer kompakteren Form zu schreiben, die der der schriftlichen Division sehr ähnelt.

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & +x^2 & -9x & +4) & : (x-1) = x^2 \ +2x \ -7 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & -9x & & \\
 & -(2x^2 & -2x) & & \\
\hline
 & & -7x & +4 & \\
 & & -(-7x & +7) & \\
\hline
 & & & -3 &
\end{array}$$

(2) Wir betrachten nun die Polynome $P(x) = 6x^4 + 2x^3 - 5x + 2$ und $Q(x) = x^2 - 3$. Wir berechnen

$$\begin{array}{llllll}
(6x^4 & +2x^3 & & -5x & +2) & : (x^2-3) = 6x^2 \ +2x \ +18 \\
-(6x^4 & & -18x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^3 & +18x^2 & -5x & & \\
 & -(2x^3 & & -6x) & & \\
\hline
 & & 18x^2 & +x & +2 & \\
 & & -(18x^2 & & -54) & \\
\hline
 & & & x & +56 &
\end{array}$$

und erhalten somit die Darstellung $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ mit Polynomen

$$S(x) = 6x^2 + 2x + 18 \quad \text{und} \quad R(x) = x + 56.$$

(3) Die Polynomdivision ist extrem nützlich, um alle Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen. Dies hat mit der folgenden Aussage zu tun:

Behauptung: Es seien $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynom und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von P, d.h. es gilt $P(x_0) = 0$. Dann liefert die Polynomdivision von P durch $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} Q(x) = x - x_0$ eine Faktorisierung $P(x) = S(x)(x - x_0)$ mit einem weiteren Polynom $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis: Polynomdivison angewandt auf P und Q liefert weitere Polynome $R, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und der Grad von $\mathbb{R}$ echt kleiner als 1 ist. Da nur konstante Polynome Grad kleiner gleich 0 haben, muss R bereits konstant sein. Außerdem gilt

$$R(x_0) = P(x_0) - S(x_0)Q(x_0) = 0 - S(x_0) \cdot 0 = 0$$

weshalb R konstant 0 ist. Das zeigt die gesuchte Darstellung $P(x) = S(x)Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir untersuchen nun die reelle Polynomfunktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ auf Nullstellen.

Dazu werden wir zuerst durch geschicktes Raten eine Nullstelle finden: $P(1) = 1 - 6 - 1 + 6 = 0$! Nun führen wir Polynomdivision mit $Q(x) = x - 1$ aus:

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & -6x^2 & -x & +6) \; : (x-1) = x^2 - 5x - 6 \\
\underline{-(x^3} & \underline{-x^2)} & & \\
 & -5x^2 & -x & \\
 & \underline{-(-5x^2} & \underline{+5x)} & \\
 & & -6x & +6 \\
 & & \underline{-(-6x} & \underline{+6)} \\
 & & & 0
\end{array}$$

Wir haben also die Darstellung $P(x) = (x^2 - 5x - 6)(x - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gefunden. Die Nullstellen von $x \mapsto x^2 - 5x - 6$ bestimmen wir mithilfe der pq-Formel und erhalten

$$x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}},$$

also $x_2 = 6, x_3 = -1$, welche zusammen mit $x_1 = 1$ alle Nullstellen von P sind.

Bemerkung: Wir haben in Beispiel 3 eine Methode zum Finden von Nullstellen von Polynomen kennengelernt: Durch geschicktes Raten von Nullstellen kann man eventuell den Grad eines Polynoms so lange reduzieren, bis man die Nullstellen (z.B. mit der pq-Formel) ablesen kann. So eine Lösungsformel für Nullstellen von Polynomen gibt es tatsächlich auf für Polynome von Grad 3 oder 4, nur sind diese Formeln sehr groß. Aus mathematischer Sicht viel interessanter ist die Tatsache, dass für Polynome von Grad 5 KEINE Lösungsformel existiert.

6.2 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung ist ein Mittel, um für rationale Funktionen eine Darstellung zu finden, die z.B. bei der Bestimmung einer Stammfunktion sehr praktisch ist.

Ausgang sind wieder zwei Polynomfunktionen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Der Grad von P soll echt kleiner als der von Q sein. Weiter nehmen wir an, dass eine Zerlegung von Q in Linearfaktoren

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_k)^{n_k}$$

mit $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ sowie $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ existiert und bekannt ist. Nun suchen wir eine Darstellung der Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + \dots + \frac{z_1}{x - x_k} + \dots + \frac{z_{n_k}}{(x - x_k)^{n_k}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q(x) \neq 0$. Dabei sind $a_1, \dots, a_{n_1}, \dots, z_1, \dots, z_{n_k}$ reelle Zahlen, die zu finden sind.

Beispiele:

(1) Wir bestimmen die Partialbruch-Darstellung für

$$\frac{x+3}{x^2 + 5x - 14}$$

Dazu faktorisieren wir zuerst $x^2 + 5x - 14 = (x-2)(x+7)$ und schreiben die gesuchte Gleichung hin:

$$\begin{aligned}
&\frac{x - 11}{x^2 + 5x - 14} \overset{!}{=} \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+7} \\
\iff &\frac{x - 1}{x^2 + 5x - 14} = \frac{a(x+7)}{x^2 + 5x - 14} + \frac{b(x-2)}{x^2 + 5x - 14} \\
\iff &x - 11 = a(x+7) + b(x-2) \\
\iff &1 = a + b \text{ und } -11 = 7a - 2b
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung $a = -1, b = 2$ und damit die Darstellung

$$\frac{x-11}{x^2+5x-14} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+7}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -7\}$

(2) In diesem Beispiel untersuchen wir

$$\frac{1}{x^3-x^2}$$

Man kann sofort die Faktorisierung des Nenners $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ablesen. Wir lösen auf:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^3-x^2} \overset{!}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{x^3-x^2} = \frac{ax(x-1)}{x^3-x^2} + \frac{b(x-1)}{x^3-x^2} + \frac{cx^2}{x-1} \\ \Longleftrightarrow\ & 1 = a(x^2-x) + b(x-1) + cx^2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a + c = 0, a - b = 0, -b = 1$, woraus wir die Darstellung

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ablesen.

Index