

Dieses Skript wird laufend weiterentwickelt.
Version: 28.08.2020

Wichtige Ideengeber für die Entwicklung meiner Vorlesung sind die folgenden Bücher / Skripte: [2, 8, 10, 11].

1 Der Brouwersche Abbildungsgrad

Ein fundamentales Werkzeug der Nichtlinearen Analysis ist der Brouwersche Abbildungsgrad [6]. Er ordnet

- einer stetigen Funktion $f \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt) und
- einem Vektor $p \notin f(\partial\Omega)$ (d.h. $f(x) \neq p$ für alle $x \in \partial\Omega$)

eine ganze(!) Zahl $d(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$ zu. Dabei werden folgende Aussagen gelten:

- (i) $d(f, \Omega, p) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \Omega f(x) = p$
- (ii) $d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p)$, falls f, g zueinander "zulässig" homotop sind.

Die Definition der Funktion d ist abstrakt und es ist häufig unmöglich, diese Zahl anhand ihrer Definition zu berechnen. Mit Hilfe von Rechenregeln wie z.B. (ii) lassen sich diese Schwierigkeiten jedoch in manchen Fällen umgehen. Wir werden Beispiele hierfür kennenlernen.

Wozu braucht man den Abbildungsgrad und was sollte man sich darunter vorstellen? Der Abbildungsgrad ist in sehr vielen Bereichen der Nichtlinearen Analysis von entscheidender Bedeutung. Das betrifft zum Beispiel die sogenannte Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie), die Differentialtopologie und mittlerweile auch die Variationsrechnung. Er wird beispielsweise im Beweis des Fortsetzungssatzes von Leray-Schauder oder etwa im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer verwendet. Letzterer ist nach der (nichttrivialen) Bereitstellung des Abbildungsgrades ein sehr einfaches Korollar, was bereits darauf hindeutet, dass man mit diesem Werkzeug viel anstellen kann. Eine Vorstellung von diesem Objekt zu entwickeln, ist der Phantasie jedes einzelnen überlassen. Aus Sicht des Autors sollte man sich den Abbildungsgrad wegen der Eigenschaft (i) als eine Art "Lösungsdetektor" vorstellen, der über die Lösbarkeit der Gleichungen $f(x) = p$ in Ω entscheidet. Sehr wichtig: wegen der Eigenschaft (ii) sind alle mit Hilfe des Abbildungsgrades gefundenen Aussagen und zulässigen Homotopien invariant, sodass eine Eigenschaft wie $d(f, \Omega, p) \neq 0$ nicht nur f , sondern für ganz viele weitere Funktionen (derselben Homotopieklasse) gilt. Dies zu verstehen und gewinnbringend anzuwenden, ist eines der Hauptziele dieser Vorlesung.

1.1 Konstruktion des Abbildungsgrades

Wir schieben die zahlreichen Anwendungen des Abbildungsgrades hinten an und wenden uns der Konstruktion des Abbildungsgrades $d(f, \Omega, p)$ zu. Diese erfolgt graduell, und zwar in 3 Schritten:

- (a) für $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $p \notin f(\partial\Omega \cup N_f)$, wobei $N_f := \{x \in \Omega : \det(f'(x)) = 0\}$,
- (b) für $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$,
- (c) für $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$.

Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird im Folgenden stets als offen und beschränkt vorausgesetzt.

Die Vorgehensweise zur Konstruktion des Abbildungsgrades variiert je nach Dozent. Die folgende Definition ist in den allermeisten Fällen der Ausgangspunkt.

Definition 1.1. Für f, Ω, p wie in (a) definieren wir

$$d(f, \Omega, p) := \sum_{\substack{f(x)=p, \\ x \in \Omega}} \text{sign}(\det(f'(x)))$$

Wichtig: $f(x) = p$ impliziert per Voraussetzung (a) $\det(f'(x)) \neq 0$, sodass das Vorzeichen dieser Determinante wohldefiniert ist. Ferner ist diese Summe wegen (a) endlich. (Hinweis: Widerspruchsbeweis.) Ferner ist zu erwähnen, dass diese Definition in konkreten nichttrivialen Fällen unbrauchbar ist, da die Gesamtheit der Lösungen von $f(x) = p$ in den allermeisten Fällen unbekannt ist. Der Abbildungsgrad soll ja gerade dabei helfen, Lösungen zu finden, wenn diese nicht mit elementaren Methoden berechnet werden können.

Um dieses Konzept auf allgemeinere f, p ausdehnen zu können, nutzen wir, dass “typischerweise $p \notin f(\partial\Omega \cup N_f)$ ” gilt. Genauer: Für fast alle p' bzgl. des Lebesgue-Maßes gilt $p' \notin f(\partial\Omega \cup N_f) = f(\partial\Omega) \cup f(N_f)$, sodass $d(f, \Omega, p')$ für all diese Werte p' gemäß Definition 1.1 definiert ist. Dies ist eine Folgerung aus dem Lemma von Sard [21].

Lemma 1.2. [Sard, 1942] Sei $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Dann ist $f(N_f) \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Eine Beweisskizze findet sich in [8, Theorem 3.1.1] oder [11, Proposition 1.14]¹. Daher ist es möglich, ein $p' \notin f(\partial\Omega \cup N_f)$ nahe bei p zu wählen. Die Frage ist: welches? Wir zeigen, dass das Ergebnis $d(f, \Omega, p')$ nicht von der konkreten Wahl abhängt, solange der Abstand $|p - p'|$ klein genug ist. Um das zu zeigen, brauchen wir das folgende Resultat von Heinz [14].

¹Dieses Resultat besitzt weitreichende Verallgemeinerungen, die ein schönes Seminarthema hergeben würden.

Proposition 1.3 (Integraldarstellung von Heinz, 1959). *Seien f, Ω, p wie in (a). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$d(f, \Omega, p) = \int_{\Omega} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx$$

für alle $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\eta) \subset B_{\varepsilon}(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

Beweis:

Es gilt $\{x \in \Omega : f(x) = p\} = \{x_1, \dots, x_m\}$ für paarweise verschiedene x_i . Wegen $\det(f'(x_i)) \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ existieren nach dem lokalen Umkehrsatz ein $\varepsilon > 0$ und offene Umgebungen $U_{\varepsilon}(x_i)$ der x_i derart, dass $f : U_{\varepsilon}(x_i) \rightarrow B_{\varepsilon}(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : |q - p| < \varepsilon\}$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere gilt:

- (i) $\text{sign}(\det(f'(x))) = \text{sign}(\det(f'(x_i)))$ für alle $x \in U_{\varepsilon}(x_i)$,
- (ii) $f(U_{\varepsilon}(x_i)) = B_{\varepsilon}(p)$,
- (iii) $\{x \in \Omega : |f(x) - p| < \varepsilon\} = \bigcup_{i=1}^m U_{\varepsilon}(x_i)$ (disjunkte Vereinigung!).

Daher liefert der Transformationssatz für Funktionen η wie oben

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx &= \int_{\{x \in \Omega : |f(x) - p| < \varepsilon\}} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{U_{\varepsilon}(x_i)} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sign}(\det(f'(x_i))) \int_{U_{\varepsilon}(x_i)} \eta(f(x) - p) |\det(f'(x))| dx \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sign}(\det(f'(x_i))) \int_{B_{\varepsilon}(p)} \eta(z - p) dz \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sign}(\det(f'(x_i))) \\ &= d(f, \Omega, p), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Dieses Ergebnis muss noch ein wenig verbessert werden. Das $\varepsilon > 0$ aus dem obigen Beweis hängt a priori von f und p ab. Im Folgenden brauchen wir, dass die Kleinheit von ε in einem gewissen Sinne kontrollierbar ist.

Ende VL 1

Wir brauchen noch ein technisches Hilfsmittel. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Dann ist ihre Adjunkte (= Transponierte der Kofaktormatrix) gegeben durch

$$\text{adj}(A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A^{(j,i)}) \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

wobei $A^{(j,i)} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ diejenige Matrix ist, die durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte entsteht.

Proposition 1.4. *Es gilt für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$:*

- (i) $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)A = \det(A) \operatorname{id}$
- (ii) $\sum_{i=1}^n \partial_i \operatorname{adj}(g'(x))_{ij} = 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ für alle $j = 1, \dots, n$

Ein Beweis findet sich in [11, Proposition 2.2]. Die folgende Proposition zeigt zum einen, dass das ε aus der Integraldarstellung von Heinz nicht beliebig klein sein braucht. Zum anderen zeigt es, dass das obige Integral lokal konstant bzgl. \tilde{p} ist.

Proposition 1.5. *Sei $f \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und²*

$$0 < \delta < \operatorname{dist}(\tilde{p} + t(p - \tilde{p}), f(\partial\Omega)) \quad \text{für alle } t \in [0, 1]. \quad (1.1)$$

Dann gilt für alle $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ und $\operatorname{supp}(\eta) \subset B_\delta(0)$

$$\int_{\Omega} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx = \int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx \in \mathbb{Z}.$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst

$$\int_{\Omega} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx = \int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx$$

unter den genannten Voraussetzungen. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \eta(z - p) - \eta(z - \tilde{p}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (\eta(z - \tilde{p} + t(p - \tilde{p}))) dt \\ &= \left(\int_0^1 \nabla \eta(z - \tilde{p} + t(p - \tilde{p})) dt \right) (p - \tilde{p}) \\ &= \operatorname{div}(w)(z), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\text{wobei } w(z) := \left(\int_0^1 \eta(z - \tilde{p} + t(p - \tilde{p})) dt \right) (p - \tilde{p}).$$

Ferner gilt $w(f(x)) = 0$ für x aus einer offenen Umgebung von $\partial\Omega$. Dies folgt aus (1.1) und $\operatorname{supp}(\eta) \subset B_\delta(0)$. Dies und $f \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ liefert

$$v \in C_0^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \quad \text{für } v(x) := \underbrace{\operatorname{adj}(f'(x))}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{w(f(x))}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

Daher ist der Satz von Gauß anwendbar³ und es folgt aus Proposition 1.4

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v)(x) dx$$

²Dies bedeutet, dass die Verbindungsstrecke zwischen p, \tilde{p} einen Abstand größer als δ von $f(\partial\Omega)$ hat.

³Da v auf einer offenen Umgebung von $\partial\Omega$ und nicht nur auf $\partial\Omega$ selbst verschwindet, ist die Randregularität von Ω unerheblich. Formal: Definieren wir $V(x) := v(x)$ für $x \in \bar{\Omega}$ und $V(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, so gilt $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Ist dann B eine beliebige Kugel (oder ein anderes C^2 -Gebiet) mit $B \supset \Omega$, so folgt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v)(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(V)(x) dx = \int_B \operatorname{div}(V)(x) dx = \int_{\partial B} \underbrace{V}_{=0} \cdot \nu d\sigma = 0.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sum_{j=1}^n \text{adj}(f')_{ij} w_j(f) \right) (x) dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\partial_i (\text{adj}(f')_{ij})(x) w_j(f(x)) + \text{adj}(f'(x))_{ij} \partial_i (w_j(f))(x)] dx \\
&= \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \partial_i (\text{adj}(f')_{ij})(x) \cdot w_j(f(x))}_{=0} + \sum_{i,j,k=1}^n \text{adj}(f'(x))_{ij} \partial_k w_j(f(x)) \partial_i f_k(x) dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^n \partial_k w_j(f(x)) \left(\sum_{i=1}^n \text{adj}(f'(x))_{ij} \partial_i f_k(x) \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^n \partial_k w_j(f(x)) [f'(x) \text{adj}(f'(x))]_{kj} dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^n \partial_k w_j(f(x)) \det(f'(x)) \delta_{kj} dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \partial_j w_j(f(x)) \det(f'(x)) dx \\
&= \int_{\Omega} \text{div}(w)(f(x)) \det(f'(x)) dx \\
&= \int_{\Omega} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx - \int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx.
\end{aligned}$$

Es bleibt für $\tilde{p} \notin f(N_f \cup \partial\Omega)$ zu zeigen:

$$\int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx = d(f, \Omega, \tilde{p}) \in \mathbb{Z}.$$

Für $0 < \varepsilon < \delta$ definieren wir $\eta_{\varepsilon}(y) := \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^n \eta\left(\frac{\delta}{\varepsilon}y\right)$, sodass gilt

$$\begin{aligned}
\eta_{\varepsilon}(z - \tilde{p}) - \eta(z - \tilde{p}) &= \int_1^{\delta/\varepsilon} \frac{d}{dt} (t^n \eta(t(z - \tilde{p}))) dt \\
&= \int_1^{\delta/\varepsilon} (nt^{n-1} \eta(t(z - \tilde{p})) + t^n \nabla \eta(t(z - \tilde{p})) \cdot (z - \tilde{p})) dt \\
&= \text{div}(\tilde{w})(z)
\end{aligned}$$

$$\text{wobei } \tilde{w}(z) := \left(\int_1^{\delta/\varepsilon} t^{n-1} \eta(t(z - \tilde{p})) dt \right) (z - \tilde{p}).$$

Wieder verschwindet $\tilde{w}(f)$ in einer offenen Umgebung von $\partial\Omega$ und wir erhalten wie im ersten Schritt

$$\int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx = \int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx \quad \text{für } 0 < \varepsilon < \delta.$$

Da für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die Funktion η_{ε} die Bedingungen aus der Integraldarstellung von Heinz erfüllt, erhalten wir aus Proposition 1.3 (hier brauchen wir $\tilde{p} \notin$

$f(N_f \cup \partial\Omega)$

$$\int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx = \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(f(x) - \tilde{p}) \det(f'(x)) dx = d(f, \Omega, \tilde{p}) \in \mathbb{Z},$$

was zu zeigen war. □

Diese Proposition zeigt insbesondere, dass für hinreichend nahe bei $p \notin f(\partial\Omega)$ liegende “reguläre” Werte $p' \notin f(N_f \cup \partial\Omega)$ der Abbildungsgrad stets derselbe ist. Wir fassen die relevante Information zusammen.

Proposition 1.6. *Seien f, Ω, p wie in (b).*

(i) *Es existiert ein $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\tilde{p} - p| < \text{dist}(p, f(\partial\Omega))$ und $\tilde{p} \notin f(N_f)$.*

(ii) *Für alle $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \mathbb{R}^n$ wie in (i) gilt $d(f, \Omega, \tilde{p}_1) = d(f, \Omega, \tilde{p}_2) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis:

Aussage (i) ist eine direkte Folgerung aus dem Lemma von Sard. Aus Proposition 1.5

$$d(f, \Omega, \tilde{p}_1) = \int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}_1) \det(f'(x)) dx = \int_{\Omega} \eta(f(x) - \tilde{p}_2) \det(f'(x)) dx = d(f, \Omega, \tilde{p}_2)$$

für ein $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ und $\text{supp}(\eta) \subset B_{\delta}(0)$ mit $0 < \delta < \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - \max\{|\tilde{p}_1 - p|, |\tilde{p}_2 - p|\}$. In der Tat gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \text{dist}(\tilde{p}_1 + t(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1), f(\partial\Omega)) &\geq \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - |\tilde{p}_1 + t(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1) - p| \\ &\geq \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - (1-t)|\tilde{p}_1 - p| - t|\tilde{p}_2 - p| \\ &\geq \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - \max\{|\tilde{p}_1 - p|, |\tilde{p}_2 - p|\} \\ &> \delta, \end{aligned}$$

sodass die Bedingung (1.1) aus Proposition 1.5 erfüllt ist, was die Gleichheit der obigen Integrale impliziert. □

Definition 1.7. *Seien f, Ω, p wie in (b). Dann definieren wir*

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow p, \\ \tilde{p} \notin f(N_f \cup \partial\Omega)}} d(f, \Omega, \tilde{p}) = \int_{\Omega} \eta(f(x) - p) \det(f'(x)) dx$$

für η wie in Proposition 1.5.

Beachte: Der obige Grenzwert existiert, da eine Folge von \tilde{p} nach Proposition 1.6 (i) existiert und die zugehörigen Abbildungsgrade nach Teil (ii) eine ab einem gewissen Index konstante Folge bilden. Somit ist $d(f, \Omega, p)$ wohldefiniert. Um eine Definition für möglicherweise nicht differenzierbare Funktionen $f \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ zu ermöglichen, approximieren wir solche Funktionen durch Elemente von $C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, etwa mit dem Approximationssatz von Weierstrass [24] oder durch Verwendung von sogenannten Mollifiern.

Satz 1.8 (Weierstrass). Sei $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine Folge von (vektorwertigen) Polynomen (f_k) mit $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$.

Daher ist für f, Ω, p wie in (c) und approximierende Polynome (f_k) der Abbildungsgrad wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass die entsprechenden Abbildungsgrade $d(f_k, \Omega, p)$ für große k stets denselben Wert liefern. Diese Aussagen sind in folgender Proposition festgehalten.

Proposition 1.9. Seien f, Ω, p wie in (c).

- (i) Es existiert $\tilde{f} \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $\max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) - \tilde{f}(x)| < \text{dist}(p, f(\partial\Omega))$.
- (ii) Für alle $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ wie in (i)⁴ gilt $d(\tilde{f}_1, \Omega, p) = d(\tilde{f}_2, \Omega, p)$.

Beweis:

Der Teil (i) folgt aus dem Approximationssatz von Weierstrass (Satz 1.8). Für Teil (ii) definieren wir zunächst

$$\delta := \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - \max\{\|f - \tilde{f}_1\|_\infty, \|f - \tilde{f}_2\|_\infty\} > 0.$$

Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$ und $x \in \partial\Omega$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |t\tilde{f}_1(x) + (1-t)\tilde{f}_2(x) - p| &\geq |f(x) - p| - t|f(x) - \tilde{f}_1(x)| - (1-t)|f(x) - \tilde{f}_2(x)| \\ &\geq \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - t\|f - \tilde{f}_1\|_\infty - (1-t)\|f - \tilde{f}_2\|_\infty \\ &\geq \delta. \end{aligned}$$

Wähle dann $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ und $\text{supp}(\eta) \subset B_\delta(0)$. Aus Proposition 1.5 folgt für alle $t \in [0, 1]$

$$d(t\tilde{f}_1 + (1-t)\tilde{f}_2, \Omega, p) = \int_{\Omega} \eta(t\tilde{f}_1(x) + (1-t)\tilde{f}_2(x) - p) \det(t\tilde{f}'_1(x) + (1-t)\tilde{f}'_2(x)) dx \in \mathbb{Z}.$$

Diese Funktion ist stetig bezüglich t auf $[0, 1]$ sowie ganzzahlig, folglich konstant. Es folgt $d(\tilde{f}_1, \Omega, p) = d(\tilde{f}_2, \Omega, p)$, was zu zeigen war. \square

Dies führt uns zur (finalen) Definition des Abbildungsgrads.

Definition 1.10. Seien f, Ω, p wie in (c). Dann definieren wir

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{\substack{\tilde{f} \rightarrow f, \\ \tilde{f} \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)}} d(\tilde{f}, \Omega, p).$$

Ende VL 2

⁴Beachte, dass $\|f - \tilde{f}_j\|_\infty < \text{dist}(p, f(\partial\Omega))$ die Aussage $p \notin \tilde{f}_j(\partial\Omega)$ impliziert und somit der Abbildungsgrad $d(\tilde{f}_j, \Omega, p)$ wohldefiniert ist.

1.2 Eigenschaften des Abbildungsgrads

Satz 1.11. Seien f, Ω, p wie in (c). Der Abbildungsgrad der Definitionen 1.1, 1.7, 1.10 besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) $d(\text{id}, \Omega, p) = 1$ falls $p \in \Omega$ und $d(\text{id}, \Omega, p) = 0$ falls $p \notin \overline{\Omega}$.
- (ii) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ offen und disjunkt und $p \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Dann gilt:

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p).$$

- (iii) Sei $H \in C([0, 1] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $p \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$. Dann ist

$$t \mapsto d(H(t, \cdot), \Omega, p) \quad \text{konstant auf } [0, 1]$$

- (iv) $d(f, \Omega, p) \neq 0 \Rightarrow$ Es existiert ein $x \in \Omega$ mit $f(x) = p$.

Ferner: für alle $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n), p \notin f(\partial\Omega)$ existiert eine Folge (f_k) aus $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ und $p \notin f_k(\partial\Omega \cup N_{f_k})$. Insbesondere $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ für $k \rightarrow \infty$ und es gilt für fast alle k

$$d(f, \Omega, p) = d(f_k, \Omega, p) = \sum_{\substack{f_k(x)=p, \\ x \in \Omega}} \text{sign}(\det(f'_k(x))) \quad (1.3)$$

Beweis:

Wir zeigen zuerst das Approximationsresultat. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass (Satz 1.8) existieren $\tilde{f}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mit $\|\tilde{f}_k - f\|_\infty \leq \frac{1}{2k}$. Nach Proposition 1.6 (i) existieren $p_k \in \mathbb{R}^n$ mit $|p_k - p| \leq \frac{1}{2k}$ und $p_k \notin \tilde{f}_k(N_{\tilde{f}_k})$, definiere $f_k(x) := \tilde{f}_k(x) + p - p_k$. Es folgt:

- $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$,
- $\|f_k - f\|_\infty \leq \|\tilde{f}_k - f\|_\infty + |p - p_k| \leq \frac{1}{k}$,
- $p \notin f_k(N_f)$, denn $p_k \notin \tilde{f}_k(N_{\tilde{f}_k})$ und $N_{\tilde{f}_k} = N_{f_k}$,
- $p \notin f_k(\partial\Omega)$, denn $\text{dist}(p, f_k(\partial\Omega)) \geq \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - \|f_k - f\|_\infty > 0$ für $k \geq k_0$.

Nach Definition 1.1 und Definition 1.10 folgt (1.3) für große k .

Nun beweisen wir die Eigenschaften (i)-(iv).

- (i) Für die Funktion $f = \text{id}$ gilt nach Definition 1.1

$$d(\text{id}, \Omega, p) = \sum_{\substack{\text{id}(x)=p, \\ x \in \Omega}} \text{sign}(\det(\text{id}'(x))) = \begin{cases} 1 & , p \in \Omega \\ 0 & , p \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

- (ii) Sei $M := \overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Dann ist M abgeschlossen mit $p \notin f(M)$ per Annahme, also $\text{dist}(p, f(M)) > 0$. Daher gilt für f_k wie oben und große k

$$\|f_k - f\|_\infty < \text{dist}(p, f(M)) \leq \min\{\text{dist}(p, f(\partial\Omega_1)), \text{dist}(p, f(\partial\Omega_2))\}, \quad (1.4)$$

$$\text{dist}(p, f_k(M)) \geq \text{dist}(p, f(M)) - \|f - f_k\|_\infty > 0. \quad (1.5)$$

Aus Proposition 1.9 (ii) und Definition 1.10 folgt somit

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, p) &\stackrel{(1.4)}{=} d(f_k, \Omega, p) \\ &= \sum_{\substack{f_k(x)=p, \\ x \in \Omega}} \text{sign}(\det(f'_k(x))) \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \sum_{\substack{f_k(x)=p, \\ x \in \Omega_1}} \text{sign}(\det(f'_k(x))) + \sum_{\substack{f_k(x)=p, \\ x \in \Omega_2}} \text{sign}(\det(f'_k(x))) \\ &= d(f_k, \Omega_1, p) + d(f_k, \Omega_2, p) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p). \end{aligned}$$

- (iii) Da $[0, 1] \times \partial\Omega$ kompakt und $(t, x) \mapsto H(t, x) - p$ darauf stetig und nullstellenfrei ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|H(t, x) - p| \geq 2\delta \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Der Approximationssatz von Weierstrass liefert eine Funktion $\tilde{H} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mit $\|H - \tilde{H}\|_{L^\infty([0,1] \times \partial\Omega)} \leq \delta$. Dann gilt $\text{dist}(p, \tilde{H}([0, 1] \times \partial\Omega)) \geq \delta$ und für η wie in Proposition 1.5 folgt

$$d(H(t, \cdot), \Omega, p) = d(\tilde{H}(t, \cdot), \Omega, p) = \int_\Omega \eta(\tilde{H}(t, x) - p) \det(\tilde{H}_x(t, x)) dx \quad \forall t \in [0, 1].$$

Folglich ist $t \mapsto d(H(t, \cdot), \Omega, p)$ ganzzahlig und stetig bzgl. t , folglich konstant auf $[0, 1]$.

- (iv) Nach Definition 1.10 gilt für f_k wie oben und große k

$$\sum_{\substack{f_k(x)=p, \\ x \in \Omega}} \text{sign}(\det(f'_k(x))) = d(f_k, \Omega, p) = d(f, \Omega, p) \neq 0.$$

Daher existieren $x_k \in \Omega$ mit $f_k(x_k) = p$. Da f_k gleichmäßig gegen f auf $\overline{\Omega}$ konvergiert und $x_k \rightarrow x \in \overline{\Omega}$ für eine geeignete Teilfolge, erhalten wir

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) = p.$$

Aus $p \notin f(\partial\Omega)$ folgt $x \in \Omega$, was zu zeigen war.

□

Die Eigenschaften (i)-(iii) charakterisieren gar den Abbildungsgrad [1], d.h. jede Abbildung mit diesen Eigenschaften und Werten in \mathbb{Z} ist der Brouwer'sche Abbildungsgrad. Fortan nennen wir eine Homotopie wie in (iii) eine *zulässige Homotopie*. Bevor wir Anwendungen kennenlernen, stellen wir die folgende Rechenregel bereit. Sie besagt im Wesentlichen, dass der Abbildungsgrad $d(f, \Omega, p)$ durch $f|_{\partial\Omega}$ eindeutig bestimmt ist.

Korollar 1.12 (Rouché). *Seien $f, g \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ mit*

$$\max_{x \in \partial\Omega} |f(x) - g(x)| < \text{dist}(p, f(\partial\Omega)).$$

Dann gilt $d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p)$.

Beweis:

Sei $H(t, x) := (1-t)f(x) + tg(x)$. Dann ist H eine zulässige Homotopie und die Behauptung folgt aus Satz 1.11 (iii). \square

Einige Rechnungen / Übungsaufgaben rund um den Abbildungsgrad:

- Grundsätzlich gilt: Formeln und Eigenschaften von Funktionen anhand ihres Abbildungsgrades $d(f, \Omega, p)$ zeigt man in der Regel zunächst für Folgenglieder f_k wie in Satz 1.11 und betrachtet dann den Limes $k \rightarrow \infty$.
- Zeige $d(f, \Omega, p) = d(f - p, \Omega, 0)$, wobei $(f - p)(x) := f(x) - p$.
- Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g(x) := Af(Bx)$, $0 \in \Omega$. Berechne $d(g, \Omega, 0)$ in Abhängigkeit von $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, wann immer der Abbildungsgrad wohldefiniert ist.
- Zeige $d(f \otimes g, \Omega_1 \times \Omega_2, (p_1, p_2)) = d(f, \Omega_1, p_1)d(g, \Omega_2, p_2)$.
- Es gelte $f(x) = f(-x)$ und $r > 0$. Zeige, dass $d(f, B_r(0), 0)$ eine gerade Zahl ist.
- Finde eine explizite Formel für $d(f, (a, b), p)$ im eindimensionalen Fall $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$. (Diese sollte nur von $f(a), f(b)$ abhängen!)
- Finde ein Gegenbeispiel für die Umkehrung: $d(f, \Omega, p) = 0 \Rightarrow f(x) = p$ hat keine Lösung $x \in \Omega$.

Der Leser finde die passenden Annahmen an f, Ω, p , etc.

1.3 Anwendungen

Der Brouwer'sche Fixpunktsatz erhält den Charakter einer Übungsaufgabe, sobald das Konzept des Abbildungsgrads zur Verfügung steht.

Satz 1.13 (Brouwer'sche Fixpunktsatz). *Sei $f \in C(\overline{B_R(0)}; \overline{B_R(0)})$ für ein $R > 0$. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Beweis:

Sei $\Omega := B_R(0)$. Falls $f(x) = x$ für ein $x \in \partial\Omega$ gilt, ist die Behauptung richtig. Andernfalls ist die Homotopie $H(t, x) := x - tf(x)$ zulässig, denn für alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$H(1, x) \neq 0 \quad \text{sowie} \quad |H(t, x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq R - tR > 0 \quad (0 \leq t < 1).$$

Es folgt für

$$1 = d(\text{id}, \Omega, 0) = d(H(0, \cdot), \Omega, 0) = d(H(1, \cdot), \Omega, 0) = d(\text{id} - f, \Omega, 0).$$

Nach Satz 1.11 existiert ein $x \in \Omega$ mit $(\text{id} - f)(x) = 0$, d.h. $f(x) = x$. □

Bemerkung:

- Dieser Satz gilt nicht für die offene Kugel, d.h. es existieren fixpunktfreie Abbildung $f \in C(B_R(0); B_R(0))$. Finden Sie eine!
- Der Brouwer'sche Fixpunktsatz gilt gleichermaßen für $f \in C(\bar{\Omega}; \bar{\Omega})$, falls $\bar{\Omega}$ homöomorph zu $\bar{B}_1(0)$ ist⁵. Insbesondere haben stetige Selbstabbildungen von abgeschlossenen Quadern, Ellipsen (und allgemeiner von kompakten konvexen Mengen⁶) stets Fixpunkte. Nutzen Sie die obige Aussage, um zu zeigen, dass $\bar{B}_2(0) \setminus B_1(0)$ nicht homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel ist.

Ende VL 3

Satz 1.14 (Perron-Frobenius). *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit nichtnegativen Einträgen. Dann hat A einen nichtnegativen Eigenvektor zu einem nichtnegativen Eigenwert, d.h. es existiert ein $\lambda \geq 0$ und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit*

$$Ax = \lambda x \quad \text{und} \quad x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

Beweis:

Das abgeschlossene $(n-1)$ -Simplex $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ ist homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel⁷ in \mathbb{R}^{n-1} . Existiert ein $x \in \Sigma$ mit $Ax = 0$, so ist die Behauptung richtig. Andernfalls ist die Abbildung

$$f : \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad x \mapsto \frac{1}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} Ax$$

wohldefiniert(!) und stetig. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert ein $x^* \in \Sigma$ mit $f(x^*) = x^*$ und wir erhalten

$$Ax^* = \lambda x^* \quad \text{für} \quad \lambda := \sum_{i=1}^n (Ax^*)_i > 0.$$

⁵Hierzu brauchen wir nicht einmal $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ voraussetzen, entsprechende Teilmengen von topologischen Räumen wie etwa metrischen Räumen sind ebenso zulässig.

⁶Beachte: Kompakte konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^n sind i.A. nicht homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel von \mathbb{R}^n . Bereits die Menge $\{0\}$ liefert ein Gegenbeispiel. Die obige Behauptung gilt trotzdem, wie wir im Beweis des Fixpunktsatzes von Schauder sehen werden.

⁷Der Beweis ist sehr technisch - ich spare mir das hier.

□

Mit Hilfe des Brouwer'schen Fixpunktsatzes kann man auch die Existenz sogenannter Nash-Gleichgewichte, bekannt aus dem Film "A beautiful mind", beweisen. Ein sehr schönes Seminarthema! Die Definitionen zur Modellierung spieltheoretischer Vorgänge ist aufwändig und sind der Originalarbeit [18] zu entnehmen.

Satz 1.15 (Nash). *Jedes endliche Spiel hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

Im Folgenden sei stets $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Satz 1.16 (Borsuk, 1933). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ symmetrisch⁸ mit $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ erfülle $0 \notin f(\partial\Omega)$ und $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann ist $d(f, \Omega, 0)$ ungerade.*

Beweis:

Wir wählen gemäß Satz 1.11 eine Funktion $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mit $0 \notin F(\partial\Omega \cup N_F)$ und $d(f, \Omega, 0) = d(F, \Omega, 0)$. Da f ungerade auf $\partial\Omega$ ist, dürfen wir annehmen, dass auch F ungerade ist⁹. Um dies zu beweisen, approximieren wir F durch eine induktiv konstruierte Funktion. Zunächst sei $\tilde{F}_0(x) := F(x) + \delta x$ für ein betragsmäßig hinreichend kleines δ mit der Eigenschaft, dass $\det(\tilde{F}'_0(0)) \neq 0$ gilt. Induktiv definieren wir glatte Funktionen $\tilde{F}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ durch

$$\tilde{F}_k(x) := \tilde{F}_{k-1}(x) - x_k^3 q^k = x_k^3 (G_k(x) - q^k), \quad G_k(x) := x_k^{-3} \tilde{F}_{k-1}(x)$$

wobei $q^k \notin G_k(\{x \in \Omega \setminus \{x_k = 0\} : \det(G'_k(x)) \neq 0\})$, $|q^k| \leq \delta$.

Eine solche Wahl für q^k ist wegen des Lemmas von Sard möglich. Dann folgt induktiv, dass für alle $k = 1, \dots, n$ die Funktion \tilde{F}_k ungerade ist, $\det(\tilde{F}'_k(0)) \neq 0$ gilt und $\tilde{F}_k(x) = 0, x \in \Omega, (x_1, \dots, x_k) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow \det(\tilde{F}'_k(x)) \neq 0$. Schließlich gilt für $\tilde{F} := \tilde{F}_n$, da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden konnte,

$$d(\tilde{F}, \Omega, 0) = d(F, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0), \quad 0 \notin \tilde{F}(\partial\Omega \cup N_{\tilde{F}}).$$

Dann existieren paarweise verschiedene $\{x_1, \dots, x_m\}$ mit

$$\{x \in \Omega : \tilde{F}(x) = 0\} = \{0, x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_m, -x_m\}$$

und es folgt

$$d(f, \Omega, 0) = d(\tilde{F}, \Omega, 0)$$

⁸Das bedeutet $x \in \Omega \Leftrightarrow -x \in \Omega$

⁹Der Beweis dieser Aussage ist nichttrivial, da $\tilde{F}(x) := \frac{1}{2}(F(x) - F(-x))$ zwar ebenfalls $d(\tilde{F}, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0)$ erfüllt, aber $0 \notin \tilde{F}(\partial\Omega \cup N_{\tilde{F}})$ ist unklar. Um dies zu gewährleisten, muss eine aufwändigere Konstruktion vorgenommen werden. Der hier vorgestellte Zugang geht auf Gromes [13] zurück.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \left(\text{sign}(\det(\tilde{F}'(x_j))) + \text{sign}(\det(\tilde{F}'(-x_j))) \right) + \text{sign}(\det(\tilde{F}'(0))) \\
&= 2 \sum_{j=1}^m \text{sign}(\det(\tilde{F}'(x_j))) + \text{sign}(\det(\tilde{F}'(0))) \\
&\in 2\mathbb{Z} + 1.
\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $\tilde{F}'(z) = \tilde{F}'(-z)$ für alle $z \in \Omega$ gilt. Es folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 1.17. Dieser Satz ist eine Variante von Satz I in [5], der besagt, dass ungerade Funktionen $f \in C(S^{n-1}; S^{n-1})$ surjektiv sind. In der Tat folgt dies aus obigem Satz, denn sei $p \in S^{n-1}$ gegeben und $\tilde{f}(x) := |x|f(x/|x|)$ für $x \neq 0$ und $\tilde{f}(0) := 0$. Dann gilt $\tilde{f} \in C(\overline{B_1(0)}; \overline{B_1(0)})$ und für alle $s \in [0, 1]$ gilt aufgrund der Homotopieinvarianz¹⁰

$$d(\tilde{f}, B_1(0), sp) = d(\tilde{f}, B_1(0), 0) \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Daher existieren $x_s \in B_1(0)$ mit

$$|x_s|f(x_s/|x_s|) = \tilde{f}(x_s) = sp, \quad \text{insbesondere } |x_s| = s|p| = s.$$

Da eine Teilfolge von $(x_s)_{s \rightarrow 1}$ gegen ein $x^* \in S^{n-1}$ konvergiert und f stetig ist, folgt $f(x^*) = p$ und somit die Surjektivität.

Der folgende Satz impliziert, grob gesagt, dass es an mindestens einem Ort der Erdoberfläche ($\approx S^2 \subset \mathbb{R}^3$) windstill sein muss.

Satz 1.18 (Satz vom Igel). *Sei $V : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges tangentiales Vektorfeld an die Sphäre, d.h. gelte $V(x) \cdot x = 0$ für alle $x \in S^{n-1}$. Ist n ungerade, so besitzt V eine Nullstelle auf S^{n-1} .*

Beweis:

Wir nehmen an, dass V keine Nullstelle besitzt. Sei dann $V^* \in C(\overline{B_1(0)}; \mathbb{R}^n)$ gegeben durch $V^*(x) := |x|V(\frac{x}{|x|})$ und sei $H(t, x) := x \cos(t\pi) - V^*(x) \sin(t\pi)$. Da V nullstellenfrei ist, gilt für $t \in [0, 1], x \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned}
|H(t, x)|^2 &= |x|^2 \cos(t\pi)^2 + |V^*(x)|^2 \sin(t\pi)^2 - 2 \sin(t\pi) \cos(t\pi) x \cdot V^*(x) \\
&= |x|^2 \cos(t\pi)^2 + |V(x)|^2 \sin(t\pi)^2 - 2 \sin(t\pi) \cos(t\pi) \underbrace{x \cdot V(x)}_{=0} \\
&= |x|^2 \cos(t\pi)^2 + |V(x)|^2 \sin(t\pi)^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

sowie $H(0, x) = x, H(1, x) = -x$. Die Homotopieinvarianz liefert

$$1 = d(\text{id}, B_1(0), 0) = d(-\text{id}, B_1(0), 0) = (-1)^n = -1,$$

¹⁰Beachte: $\text{dist}(t \cdot sp, \tilde{f}(\partial B_1(0)), 0) \geq \text{dist}(tsp, S^{n-1}, 0) = 1 - ts > 0$ für alle $t \in [0, 1]$.

Widerspruch. □

Der folgende Satz impliziert, grob gesagt, dass es mindestens einen Ort der Erdoberfläche gibt, an dem dieselbe Temperatur und denselben Luftdruck wie an seinem antipodalen Punkt vorliegt. Er geht auf Borsuk und Ulam zurück, siehe Satz II in [5].

Satz 1.19 (Borsuk-Ulam, Antipodensatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ symmetrisch, $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ erfülle $f(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m$ für ein $m < n$. Dann existiert ein $x \in \partial\Omega$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis:

Wir nehmen $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in \partial\Omega$ an. Dann ist $g(x) := f(x) - f(-x)$ ungerade mit $0 \notin g(\partial\Omega)$. Nach Satz 1.16 ist $d(g, \Omega, 0)$ ungerade und insbesondere ungleich 0. Es folgt $d(g, \Omega, p) \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^m$ mit $|p| < \varepsilon$. Wählen wir $p \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^m$, so folgt $g(x) = p$ für ein $x \in \Omega$ und somit $p \in g(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$, Widerspruch! □

Satz 1.20 (Ham Sandwich Theorem). *Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen endlichen Volumens. Dann existiert eine Ebene in \mathbb{R}^n , die jede dieser Mengen in zwei volumengleiche Teile teilt.*

Beweis:

Sei $f = (f_1, \dots, f_n) \in C(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$f_i(a, b_1, \dots, b_n) := |\{x \in A_i : b \cdot x > a\}| = |A_i \cap \{b \cdot x > a\}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Somit gilt $f_i(z) + f_i(-z) = |A_i|$ für alle $z \in S^n, i \in \{1, \dots, n\}$. Andererseits liefert der Borsukschen Antipodensatz existiert ein $z^* = (a^*, b^*) \in S^n$ mit $f(z^*) = f(-z^*)$, also

$$|A_i| = f_i(z^*) + f_i(-z^*) = 2f_i(z^*) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Dies beweist

$$|A_i \cap \{b^* \cdot x > a^*\}| = \frac{1}{2}|A_i| \quad (i = 1, \dots, n),$$

was zu zeigen war. □

Damit ist der folgende Meilenstein der Mathematik erreicht: Wir wissen nun, dass man ein Schinkenbrot und die beiden umgebenden Brotscheiben ($\simeq 3$ messbare Teilmengen des \mathbb{R}^3) mit einem Schnitt (\simeq eine Ebene) so zerteilen kann, dass zwei Schinkenbrote mit gleichen Brot- und Schinken-Anteilen herauskommen.

1.4 Übungsaufgaben

Satz 1.21. *Sei $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \cdot x \geq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann besitzt f eine Nullstelle in $\overline{\Omega}$.*

Satz 1.22. *Es gelte $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $0 \notin f(\partial\Omega)$. Ist n ungerade, so existiert ein $x \in \partial\Omega$ und $\lambda \neq 0$ mit $f(x) = \lambda x$.*

Aufgaben:

- Die Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ erfülle $|f(x)| \leq A + B|x|^\gamma$, wobei $0 \leq \gamma < 1$. Dann hat f einen Fixpunkt in \mathbb{R}^n . Für welche A, B ist diese Aussage auch im Fall $\gamma = 1$ richtig?
- Zeigen Sie, dass nichtdegenerierte Quader \mathbb{R}^n homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel in \mathbb{R}^n sind.
- Zeige, dass im Satz vom Igel auf die Annahme “ n ungerade” i.A. nicht verzichtet werden kann.
- Verallgemeinere den Satz von Borsuk auf Funktionen $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $\frac{f(x)}{|f(x)|} \neq \frac{f(-x)}{|f(-x)|}$ für alle $x \in \partial\Omega$.
Hinweis: Finde eine geeignete zulässige Homotopie.

Ende VL 4

2 Der Abbildungsgrad von Leray-Schauder

Der Leray-Schauder-Grad, der in der Arbeit [16] aus dem Jahr 1934 entwickelt wurde, verallgemeinert den Brouwer’schen Abbildungsgrad auf eine Klasse stetiger Selbstabbildungen von Banachräumen. Dies wird erneut durch Approximation von Funktionen $f \in C(\overline{\Omega}; X)$ erreicht, wobei $\Omega \subset X$ eine offene beschränkte Teilmenge eines Banachraums $(X; \|\cdot\|)$ ist. Die approximierenden Funktionen sind Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen, für die der Brouwer’sche Abbildungsgrad nach Identifikation mit \mathbb{R}^m ($m \in \mathbb{N}$) wohldefiniert ist. Um die Approximierbarkeit zu gewährleisten, betrachten wir die folgende Klasse von Funktionen und $p \in X$:

(d) $f(x) = x - F(x)$ mit $F \in C(\overline{\Omega}; X)$ kompakt¹¹ und $p \notin f(\partial\Omega)$.

Beachte: Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ gilt (c) = (d). Ein Grund für die Wahl dieser Klasse von Funktionen ist das folgende Resultat.

Proposition 2.1. *Seien f, Ω, p wie in (d). Dann gilt $\text{dist}(p, f(\partial\Omega)) > 0$.*

Beweis:

Wir nehmen $\text{dist}(p, f(\partial\Omega)) = 0$ an, d.h. es existiert eine Folge (x_m) aus $\partial\Omega$ mit $f(x_m) = x_m - F(x_m) \rightarrow p$ in X . Da (x_m) beschränkt und F kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $(F(x_m))$ und somit auch eine Teilfolge von (x_m) , denn $x_m = F(x_m) + p + o(1)$ für $m \rightarrow \infty$. Da $\partial\Omega$ abgeschlossen ist, gilt nach Übergang zu einer Teilfolge $x_m \rightarrow x \in \partial\Omega$. Da

¹¹Eine (i.A. nichtlineare) Abbildung heißt kompakt, falls beschränkte Teilmengen von $\overline{\Omega}$ auf präkompakte Teilmengen von X abgebildet werden. Da hier Ω als beschränkt vorausgesetzt wird, liegt Kompaktheit genau dann vor, wenn für jede Folge (x_m) aus Ω die Bildfolge $(F(x_m))$ eine (norm-)konvergente Teilfolge besitzt.

f stetig ist, folgt $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = p$, also $p \in f(\partial\Omega)$, Widerspruch! \square

Für allgemeine stetige Abbildungen $f \in C(\bar{\Omega}; X)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ ist dies im Allgemeinen nicht richtig. Finden Sie ein Gegenbeispiel, etwa für $p = 0$ und die Einheitskugel Ω eines Folgenraums (z.B. $X = l^2(\mathbb{N})$). In typischen Anwendungen wie bei Randwertproblemen für elliptische partielle Differentialgleichungen oder Integralgleichungen sind die auftretenden Gleichung nicht unmittelbar dieser Form, sondern müssen erst auf diese Form gebracht werden¹² Der erste Schritt bei der Definition des Leray-Schauder-Grades ist die entsprechende Definition auf endlichdimensionalen Vektorräumen $\neq \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2. *Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\Omega \subset X$ offen und beschränkt, $f \in C(\bar{\Omega}; X)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$.*

- (i) *Ist $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, dann erfüllen $\psi \circ f \circ \psi^{-1}, \psi(\Omega), \psi(p)$ die Bedingungen aus (c).*
- (ii) *Für $\psi, \tilde{\psi}$ wie in (i) gilt*

$$d(\psi \circ f \circ \psi^{-1}, \psi(\Omega), \psi(p)) = d(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\psi}^{-1}, \tilde{\psi}(\Omega), \tilde{\psi}(p))$$

(Hier bezeichnet d den üblichen Brouwer'schen Abbildungsgrad.)

Wir sparen uns den Beweis, der den üblichen Schritten folgt. Man approximiert f durch geeignete glatte Funktionen f_m . Ferner gilt $\phi(x) := (\psi \circ \tilde{\psi}^{-1})(x) = Ax$ für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für jedes f_m gilt dann die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} \det((\psi \circ f_m \circ \psi^{-1})'(x)) &= \det((\phi \circ \tilde{\psi} \circ f_m \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \phi^{-1})'(x)) \\ &= \det(A \cdot (\tilde{\psi} \circ f_m \circ \tilde{\psi}^{-1})(\phi^{-1}(x)) \cdot A^{-1}) \\ &= \det(A) \det((\tilde{\psi} \circ f_m \circ \tilde{\psi}^{-1})(\phi^{-1}(x))) \det(A^{-1}) \\ &= \det((\tilde{\psi} \circ f_m \circ \tilde{\psi}^{-1})(\phi^{-1}(x))) \end{aligned}$$

und hieraus folgt die Behauptung auch für f . Die obige Proposition ermöglicht die folgende Definition.

Definition 2.3. *Seien X, f, Ω, p wie in Proposition 2.2. Wir definieren*

$$d(f, \Omega, p) := d(\psi \circ f \circ \psi^{-1}, \psi(\Omega), \psi(p))$$

für einen beliebigen Isomorphismus $X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

¹²Ein Beispiel: Sucht man z.B. eine schwache Lösung $u \in H_0^1(B)$ des Randwertproblems $-\Delta u - u \sin(u) = f$ auf einer Kugel B mit homogenen Dirichletranddaten, so kan man dies Gleichung in $X = L^2(B)$ äquivalent(!) umformulieren in $u - F(u) = p$, wobei $F(u) = (-\Delta)^{-1}(u \sin(u))$ und $p := (-\Delta)^{-1}f$. Die notwendigen Erklärungen und Definitionen hierzu werden in der Vorlesung "Rand- und Eigenwerte" bereitgestellt. Die Kompaktheit von F ergibt sich aus dem Satz von Rellich-Kondrachov.

Dieser Abbildungsgrad hat dieselben Eigenschaften wie der Brouwer'sche Abbildungsgrad. Ziel ist nun die Approximation von Funktionen wie in (d) durch Funktionen, die auf endlichdimensionalen Unterräumen von X definiert sind. In der Tat können wir beweisen, dass kompakte Funktionen $F_k \in C(\bar{\Omega}; X)$ mit der Eigenschaft existieren, dass $\|F_k - F\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ gilt und $F_k(\bar{\Omega})$ in einem endlichdimensionalen Vektorraum enthalten ist.

Proposition 2.4. *Sei X ein Banachraum und f, Ω, p, F wie in (d). Dann gilt:*

- (i) *Es existiert ein endlichdimensionaler Unterraum $\tilde{X} \subset X$ und $\tilde{F} \in C(\bar{\Omega}; \tilde{X})$ mit $\tilde{F}(\bar{\Omega}) \subset \tilde{X}$, $p \in \tilde{X}$ und $\|\tilde{F} - F\|_\infty < \text{dist}(p, f(\partial\Omega))$.*
- (ii) *Für alle $(\tilde{X}_1, \tilde{F}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{F}_2)$ wie in (i) gilt*

$$d(\text{id} - \tilde{F}_1, \Omega \cap \tilde{X}_1, p) = d(\text{id} - \tilde{F}_2, \Omega \cap \tilde{X}_2, p).$$

Beweis:

Wir zeigen die Existenz einer Abbildung $\pi \in C(\overline{F(\bar{\Omega})}; X)$ mit endlichdimensionalem Bild¹³ derart, dass $\tilde{F} := \pi \circ F$ die Ungleichung $\|\tilde{F} - F\|_\infty < \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) =: \delta$ erfüllt. Beachte $\delta > 0$ wegen Proposition 2.1. Die Behauptung (i) ergibt sich dann aus $\tilde{X} := \text{span}\{\tilde{F}(\bar{\Omega})\} + \mathbb{R}p$.

Da $\overline{F(\bar{\Omega})}$ in X kompakt ist (denn F ist kompakt), existieren $z_1, \dots, z_m \in X$ mit $\overline{F(\bar{\Omega})} \subset \bigcup_{j=1}^m B_\delta(z_j)$. Nun definiere die stetigen Funktionen $\pi : \overline{F(\bar{\Omega})} \rightarrow X$ und $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m : \overline{F(\bar{\Omega})} \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\pi(z) := \sum_{j=1}^m \vartheta_j(z) z_j, \quad \text{wobei } \vartheta_j(z) := \frac{(\delta - \|z - z_j\|)_+}{\sum_{i=1}^m (\delta - \|z - z_i\|)_+}.$$

Dann hat π endlichdimensionales Bild und es gilt $0 \leq \vartheta_j \leq 1$, $\vartheta_1 + \dots + \vartheta_m = 1$ auf $\overline{F(\bar{\Omega})}$ und $\text{supp}(\vartheta_j) = \overline{B_\delta(z_j)}$. Für $\tilde{F} := \pi \circ F$ folgt dann (i) aus $(x \in \bar{\Omega}, z := F(x))$

$$\|\tilde{F}(x) - F(x)\| = \|\pi(z) - z\| = \left\| \sum_{j=1}^m \vartheta_j(z)(z_j - z) \right\| \leq \sum_{j=1}^m \vartheta_j(z) \|z_j - z\| \leq \sum_{j=1}^m \vartheta_j(z) \delta = \delta.$$

Für den Beweis von (ii) sei $p \in \tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$ definieren wir den endlichdimensionalen Unterraum $\tilde{X}_3 := \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 \subset X$. Die *Dimensionsreduktionseigenschaft* des Brouwer'schen Abbildungsgrads impliziert

$$\begin{aligned} d(\text{id} - \tilde{F}_1, \Omega \cap \tilde{X}_1, p) &= d(\text{id} - \tilde{F}_1, \Omega \cap \tilde{X}_3, p), \\ d(\text{id} - \tilde{F}_2, \Omega \cap \tilde{X}_2, p) &= d(\text{id} - \tilde{F}_2, \Omega \cap \tilde{X}_3, p). \end{aligned}$$

¹³Man spricht auch von "endlichem Rang" bzw. "finite rank" im Englischen.

Die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrads in \tilde{X}_3 zeigt, dass die rechten Seiten übereinstimmen. In der Tat gilt für¹⁴ $x \in \partial_{\tilde{X}_3}(\Omega \cap \tilde{X}_3) \subset \partial\Omega \cap \tilde{X}_3 \subset \partial\Omega$ und $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \|(\text{id} - (1-t)\tilde{F}_1 - t\tilde{F}_2)(x) - p\| &\geq \|f(x) - p\| - (1-t)\|\tilde{F}_1 - F\|_\infty - t\|\tilde{F}_2 - F\|_\infty \\ &\geq \text{dist}(p, f(\partial\Omega)) - \max\{\|\tilde{F}_1 - F\|_\infty, \|\tilde{F}_2 - F\|_\infty\} > 0 \end{aligned}$$

Um die *Dimensionsreduktionseigenschaft* des Brouwer'schen Abbildungsgrades zu beweisen, nehmen wir $\tilde{X} = \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n = X$ an, wobei $f = \text{id} - F$ mit $F(\bar{\Omega}) \subset \tilde{X}, p \in \tilde{X}$. Für $\tilde{F}|_{\bar{\Omega} \cap \tilde{X}} : \bar{\Omega} \cap \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ zeigen wir

$$d(\text{id} - F, \Omega, p) = d(\text{id} - \tilde{F}, \Omega \cap \tilde{X}, p).$$

Per Approximation genügt es, diese Formel im Fall $F \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $p \notin F(\partial\Omega \cup N_F)$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(\text{id} - F, \Omega, p) &= \sum_{\substack{x - F(x) = p, \\ x \in \Omega}} \text{sign}(\det(I_n - F'(x))) \\ &= \sum_{\substack{\tilde{x} - \tilde{F}(\tilde{x}) = p, \\ \tilde{x} \in \Omega \cap \tilde{X}}} \text{sign} \left(\det \begin{pmatrix} I_m - F_{\tilde{x}}(\tilde{x}, 0) & * \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{\substack{\tilde{x} - \tilde{F}(\tilde{x}) = p, \\ \tilde{x} \in \Omega \cap \tilde{X}}} \text{sign}(\det(I_m - \tilde{F}'(\tilde{x}))) \\ &= d(\text{id} - \tilde{F}, \Omega \cap \tilde{X}, p). \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung haben wir verwendet, dass jede Lösung $x \in \Omega$ von $x - F(x) = p$ in $\Omega \cap \tilde{X}$ liegt, denn $x = F(x) + p \subset \tilde{X}$ □

Analog zu den Konstruktionen zuvor, ermöglicht diese Proposition die folgende Definition.

Definition 2.5. *Seien f, Ω, p, F wie in (d). Dann ist der Leray-Schauder-Grad definiert durch*

$$d(f, \Omega, p) = d(\text{id} - \tilde{F}, \Omega \cap \tilde{X}, p)$$

für beliebige $\tilde{X} \subset X, \tilde{F}$ wie in Proposition 2.4(i).

Satz 2.6. *Seien f, Ω, p, F wie in (d). Der Leray-Schauder-Grad aus Definition 2.5 hat die folgenden Eigenschaften:*

- (i) $d(\text{id}, \Omega, p) = 1$ falls $p \in \Omega$ und $d(\text{id}, \Omega, p) = 0$ falls $p \notin \bar{\Omega}$.

¹⁴Das Symbol $\partial_{\tilde{X}_3}$ bezeichnet den im Raum \tilde{X}_3 gebildeten (relativen) Rand. Dieser ist im Allgemeinen ungleich dem in X gebildeten Rand. Beispiel: Der klassische Rand der Menge $(0, 1) \times \{0\}$ in \mathbb{R}^2 ist $\{0, 1\} \times \{0\}$. Der relativ zum Unterraum $\mathbb{R} \times \{0\}$ gebildete Rand ist $\{0, 1\} \times \{0\}$.

(ii) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ offen und disjunkt und $p \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Dann gilt:

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p).$$

(iii) Sei $H \in C([0, 1] \times \overline{\Omega}; X)$ und $p \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$, wobei $H(t, x) = x - F(t, x)$ mit $F : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow X$ kompakt. Dann ist

$$t \mapsto d(H(t, \cdot), \Omega, p) \quad \text{konstant auf } [0, 1]$$

(iv) $d(f, \Omega, p) \neq 0 \Rightarrow$ Es existiert ein $x \in \Omega$ mit $f(x) = p$.

Erneut kann man eine Approximationsaussage analog zu Satz 1.11 beweisen, auf der die Beweise dieser vier Eigenschaften beruhen, vgl. Teorema (9.4) in [10]. Wie im endlichdimensionalen Fall erlaubt der Leray-Schauder-Grad den Beweis von wichtigen Fixpunktsätzen und darüberhinausgehender Resultate.

Ende VL 5

2.1 Der Fixpunktsatz von Schauder

Wir kommen zu einer wichtigen Anwendung des Leray-Schauder-Grades: der Fixpunktsatz von Schauder. Letzterer ist eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Brouwer auf unendlichdimensionale Banachräume. Er stammt aus dem Jahr 1927 (Satz I in [22]) und ist somit älter als der Leray-Schauder-Grad. Dementsprechend ist der historische Beweis anders als der hier präsentierte, der jedoch deutlich eleganter ist.

Satz 2.7 (Fixpunktsatz von Schauder, 1927). *Sei $A \subset X$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge sowie $f \in C(A; A)$ kompakt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis:

Wir imitieren zunächst den Beweis des Brouwer'schen Fixpunktsatzes für den Spezialfall $A = \overline{B_R(0)}$, $R > 0$. Falls eine Nullstelle von $\text{id} - f$ auf $\partial B_R(0)$ existiert, so sind wir fertig. Falls nicht, dann ist $d(\text{id} - f, B_R(0), 0)$ definiert und $H(t, x) = x - tf(x)$ ist eine zulässige Homotopie, denn

$$\begin{aligned} x \in \partial B_R(0), 0 \leq t < 1: & \quad |H(t, x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq R - tR > 0 \\ x \in \partial B_R(0), t = 1: & \quad |H(1, x)| = |x - f(x)| > 0 \quad \text{per Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Daher $d(\text{id} - f, B_R(0), 0) = d(\text{id}, B_R(0), 0) = 1$, d.h. f besitzt einen Fixpunkt in $B_R(0)$.

Im allgemeinen Fall nutzen wir, dass A ein sogenanntes Retrakt einer umgebenden Kugel ist, d.h. es existiert eine stetige Funktion $\pi : \overline{B_R(0)} \rightarrow A$ mit $\pi|_A = \text{id}_A$, falls R hinreichend

groß ist. Dies ist eine Konsequenz des Fortsetzungssatzes von Dugundji¹⁵. Dann liefert das obige Resultat, dass die stetige und kompakte¹⁶ Funktion $\tilde{f} := f \circ \pi : \overline{B_R(0)} \rightarrow A \subset \overline{B_R(0)}$ einen Fixpunkt $x^* \in \overline{B_R(0)}$ hat. Wegen $x^* = \tilde{f}(x^*) \in A$ erhalten wir $\pi(x^*) = x^*$ und somit

$$x^* = \tilde{f}(x^*) = f(\pi(x^*)) = f(x^*),$$

d.h. $x^* \in A$ ist ein Fixpunkt von A . □

Der Schaudersche Fixpunktsatz ermöglicht einen vergleichsweise kurzen und eleganten Beweis des Existenzsatzes von Peano, der auf das Jahr 1894 zurückgeht und im (leider nur schwer lesbaren) Artikel [19] bewiesen wurde. Um die Kompaktheitsvoraussetzung zu verifizieren, verwenden wir den Satz von Arzelà-Ascoli. Ascoli bewies den Satz 1884 für equi-Lipschitz-Funktionen [4] und zehn Jahre später verallgemeinerte Arzelà [3] das Resultat auf gleichgradig stetige Funktionen.

Definition 2.8. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $k, m \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt gleichgradig stetig auf A , falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$x, y \in A, |x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f_k(x) - f_k(y)| \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Eine hinreichende Bedingung für gleichgradige Stetigkeit ist $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\nabla f_k(x)| \leq a(x)$ für $a \in L^1(A)$. Verlangen wir zusätzlich $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x_0)| < \infty$ für ein $x_0 \in A$, so sind die Bedingungen des folgenden Kompaktheitskriteriums erfüllt.

Satz 2.9 (Arzelà, Ascoli). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig auf A . Dann besitzt (f_k) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis:

Sei die Familie $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie gefordert, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q} \cap A$. Dann existiert aufgrund der Beschränktheit der Folge eine Teilfolge $(f_{1,k})$ von (f_k) so, dass $(f_{1,k}(x_1))$ konvergiert. Dasselbe Argument liefert eine Teilfolge $(f_{2,k})$ von $(f_{1,k})$ (und damit von (f_k)) mit der Eigenschaft, dass $(f_{2,k}(x_2))$ konvergiert. Induktiv erhalten wir Teilfolgen $(f_{j,k})$ von (f_k) mit der Eigenschaft, dass $(f_{j,k}(x_i))$ für alle $i = 1, \dots, j$ konvergiert, sodass die Diagonalfolge $g_k := f_{k,k}$ ebenfalls Teilfolge von (f_k) ist und für alle $x \in \mathbb{Q} \cap A$ konvergiert.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da A kompakt, ist (f_k) und somit (g_k) gleichgradig stetig. Daher existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$x, y \in A, |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |g_k(x) - g_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

¹⁵Dieser entstammt der Arbeit [12]. Wir verwenden die folgende vereinfachte Variante dieses Resultats: "Seien X, Y Banachräume und sei $A \subset X$ eine abgeschlossene und $B \subset Y$ eine konvexe Teilmenge. Dann besitzt jedes $g \in C(A; B)$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{g} \in C(X; B)$." (Wir wenden dieses Resultat auf die Funktion $g = \text{id}_A$ an.)

¹⁶denn f ist kompakt und π ist beschränkt

Aufgrund der Kompaktheit von A existieren $y_1, \dots, y_l \in A \cap \mathbb{Q}$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^l B_\delta(y_i)$. Wähle dann $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{k, m \geq k_0} |g_k(y_i) - g_m(y_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Für $x \in A$ und $k, l \geq n_0$ existiert dann ein y_i mit $x \in B_\delta(y_i)$ und somit

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_l(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(y_i)| + |g_k(y_i) - g_l(y_i)| + |g_l(y_i) - g_l(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Darum ist (g_k) eine Cauchy-Folge und die Behauptung folgt aus der Vollständigkeit von $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. \square

Korollar 2.10 (Existenzsatz von Peano). *Seien $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig für eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ von (x_0, y_0) . Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

eine Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$.

Beweis:

Analog zum Satz von Picard-Lindelöf¹⁷ wenden wir einen Fixpunktsatz auf die zugehörige Integralgleichung an. Statt des Fixpunktsatzes von Banach, der unter stärkeren Voraussetzungen (f Lipschitz bzgl. y) eine eindeutige Lösung liefert, nutzen wir den Fixpunktsatz von Schauder. Als Banachraum wählen wir $X_\delta := C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$ für $I_\delta := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ für ein hinreichend klein zu wählendes δ . Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|y\| := \max_{x \in I_\delta} |y(x)|,$$

wobei $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ (irgend-)eine Norm auf \mathbb{R}^n ist. Sei $R > 0$ derart (klein), dass f wohldefiniert und stetig auf $I_\delta \times B_R(y_0)$ ist und

$$B := \{y \in X_\delta : \|y - y_0\| < R\}.$$

(B ist also eine Kugel im Banachraum X_δ um die konstante Funktion $x \mapsto y_0$.) Wir zeigen weiter unten, dass für hinreichend kleine $\delta > 0$ die Funktion

$$F : \overline{B} \rightarrow \overline{B}, \quad y \mapsto \left(x \mapsto \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt + y_0 \right)$$

¹⁷Eine klare Referenz für den Satz von Picard-Lindelöf ist nicht leicht zu finden. Auf [20, Seite 88f.] wird dieser Satz sowie eine Korrespondenz mit Lindelöf (1894) angedeutet. Der historische Beweis erfolgt durch "sukzessive Approximationen", was man heute unter dem Namen Picard-Iteration zusammenfasst. Diese Iteration liegt dem Beweis des Fixpunktsatzes von Banach zugrunde, der heutzutage für den Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes verwendet wird. In Frankreich oder Italien wird dieses Resultat den (älteren) Mathematikern Cauchy und Lipschitz zugeordnet.

wohldefiniert, stetig und kompakt ist. Dann folgt aus dem Fixpunktsatz von Schauder die Existenz eines Fixpunkts $y \in \overline{B}$ von F und somit die Existenz einer stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (2.1).

Es bleiben die Selbstabbildungseigenschaft, die Stetigkeit und die Kompaktheit zu überprüfen.

- *Selbstabbildung:* Für $y \in \overline{B}$ gilt für ein hinreichend kleines $\delta > 0$

$$\|F(y) - y_0\| = \max_{x \in I_\delta} \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \delta \max_{t \in I_\delta, |z - y_0| \leq R} |f(t, z)| \leq R,$$

also $F(y) \in \overline{B}$.

- *Stetigkeit:* Aus $y_m, y \in \overline{B}$ mit $\|y_m - y\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \|F(y_m) - F(y)\| &= \max_{x \in I_\delta} \left| \int_{x_0}^x f(t, y_m(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{I_\delta} |f(t, y_m(t)) - f(t, y(t))| dt \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

- *Kompaktheit:* Für eine beliebige Folge (y_m) aus \overline{B} gilt $(z_m := F(y_m))$

$$\max_{x \in I_\delta} |z'_m(x)| = \max_{x \in I_\delta} |f(x, y_m(x))| \leq \max_{x \in I_\delta, |z - y_0| \leq R} |f(x, z)| < \infty.$$

Ferner $|z_m(x_0)| = |y_0|$. Daher ist Funktionenfolge (z_m) gleichgradig stetig und punktweise beschränkt. Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert, dass eine Teilfolge von (z_m) gleichmäßig und somit in der Norm von X konvergiert.

□

Aufgaben:

- Seien X, Y, Z Banachräume und $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. Zeigen Sie, dass $g \circ f : X \rightarrow Z$ kompakt ist, wenn f kompakt und g stetig ist. Zeigen Sie, dass dies ebenfalls gilt, wenn f auf beschränkten Mengen beschränkt ist und g kompakt ist. (Diese Aussage wurde im Beweis des Fixpunktsatzes von Schauder benutzt.)
- Zeigen Sie mit dem Existenzsatz von Peano und dem Zornschen Lemma die Existenz von globalen Lösungen von Anfangswertproblemen der Form (2.1) unter den genannten Voraussetzungen. Eine solche "globale" Lösung y ist auf einem offenen Intervall I stetig differenzierbar und für jede kompakte Menge $K \subset U$ gilt $\inf_{t \in I} \text{dist}((t, y(t)), K^c) = 0$.
(Mit anderen Worten: Diese Lösung existiert für alle Zeiten oder nähert sich dem Rand von ∂U oder wird unbeschränkt.)

Ende VL 6

2.2 Der Fortsetzungssatz von Leray-Schauder

Zur Motivation betrachten wir das folgende Beispiel: Sei X ein Hilbertraum, $p \in X$ und $F \in C(X; X)$ kompakt mit $\langle F(x), x \rangle \leq C\|x\|^\gamma$ mit $C \geq 0, 0 \leq \gamma < 2$. Wir betrachten die Gleichung

$$f_\lambda(x) = p, \quad x \in X \quad \text{wobei } f_\lambda(x) := x - \lambda F(x). \quad (2.2)$$

Im Fall $\lambda \in [0, \Lambda]$ erfüllt jede dieser Lösungen

$$\|x\|^2 = \langle p, x \rangle + \lambda \langle F(x), x \rangle \leq \|p\|\|x\| + C\lambda\|x\|^\gamma \leq \|p\|\|x\| + C\Lambda\|x\|^\gamma$$

und somit $\|x\| < R$ für eine nur von $\|p\|, C\Lambda, \gamma$ abhängige positive Zahl $R = R(\|p\|, C\Lambda, \gamma) > \|p\|$. Eine solche Abschätzung nennt man *A-priori-Abschätzung*, da sie für alle Lösungen gilt (und das unabhängig davon, ob deren Existenz überhaupt gesichert ist). Wir haben somit gezeigt:

$$f_\lambda(x) \neq p \quad \text{für alle } x \in \partial B_R(0), \lambda \in [0, \Lambda].$$

Die Homotopieinvarianz des Leray-Schauder-Grades liefert

$$d(f_\lambda, B_R(0), p) = d(f_0, B_R(0), p) = d(\text{id}, B_R(0), p) = 1 \quad \text{für alle } \lambda \in [0, \Lambda].$$

Insbesondere existiert für jedes $\lambda \in [0, \Lambda]$ mindestens eine Lösung von (2.2) in $B_R(0)$.

Die sich stellende Frage ist nun die folgende: Variieren die so konstruierten Lösungen “stetig” bezüglich λ oder sind sie “wild” in $B_R(0)$ verteilt? Für $\lambda = 0$ ist die Lösung von (2.2) eindeutig, nämlich $x = p$. Ist $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ zusätzlich stetig differenzierbar, so folgt aus $f'_0(p)[\cdot] = \text{id}$ und dem Satz über implizit definierte Funktionen [8, Theorem 1.2.1], dass alle Lösungen der Gleichung $(x, \lambda) \approx (p, 0)$ auf einer stetig differenzierbaren Kurve $\lambda \mapsto x_\lambda$ liegen. Dies beschreibt die Struktur der Lösungsmenge in der Nähe des Ausgangspunktes. Wie sieht das globale Bild aus? Die Vermutung ist naheliegend, dass alle Lösungen auf einer “Kurve” liegen. Im Allgemeinen ist das nicht richtig, aber der Fortsetzungssatz von Leray-Schauder zeigt, dass Lösungen in einer abgeschlossenen und zusammenhängenden Menge (ein *Kontinuum*) liegen, die unbeschränkt ist. Für die genaue Beschreibung brauchen wir ein wenig Notation.

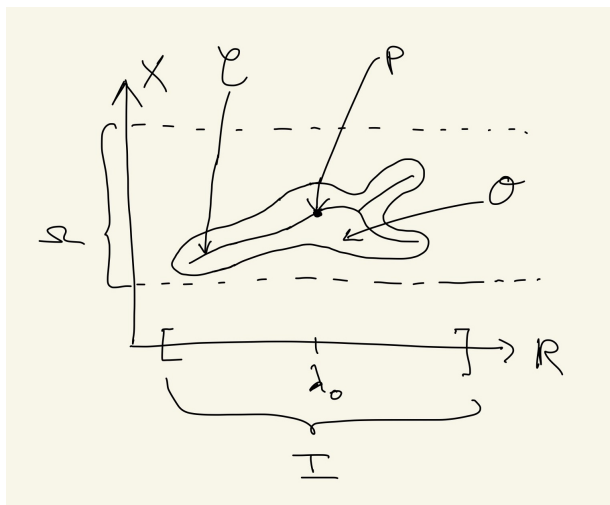
Sei im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall und

$$\Sigma = \{(x, \lambda) \in \overline{\Omega} \times I : f_\lambda(x) = p\},$$

wobei $\Omega \subset X$ offen und beschränkt ist mit $p \in \Omega$ und $\lambda_0 \in I$. (Hier übernimmt λ_0 die Rolle von 0 im obigen Beispiel.) Es handelt sich also um die Menge aller Lösungen der Gleichung in $\overline{\Omega} \times I$. Wir nehmen stets $f_\lambda(x) = x - F(x, \lambda)$ an, wobei $F \in C(\overline{\Omega} \times I)$ kompakt sei. Wir schreiben $\Sigma_\lambda := \{x \in \overline{\Omega} : (x, \lambda) \in \Sigma\}$ und entsprechend für andere Teilmengen von $\overline{\Omega} \times I$. Wir beweisen im Folgenden die Unbeschränktheit eines Kontinuums $\mathcal{C} \subset \Sigma \subset \overline{\Omega} \times I$, das die spezielle Lösung (p, λ_0) enthält. Die Projektion auf den Parameterraum sei $\text{pr}(\mathcal{C}) := \{\lambda \in I : \mathcal{C}_\lambda \neq \emptyset\}$.

Die Beweisstrategie ist hierbei die folgende:

- (a) Wir betrachten die Zusammenhangskomponente¹⁸ \mathcal{C} des Punktes (p, λ_0) in der Menge Σ . (Diese kann, muss aber nicht alle Lösungen der Gleichung und damit alle Elemente von Σ enthalten.) Ziel ist der Beweis der Aussage $\mathcal{C} \cap \partial(\Omega \times I) \neq \emptyset$. Wir nehmen das Gegenteil an.
- (b) Dann konstruieren wir eine geeignete Umgebung $\mathcal{O} \subset \bar{\Omega} \times I$ dieses Kontinuums, deren Rand keine Lösungen enthält. Das ist der technisch anspruchsvollste Teil des Beweises.
- (c) Wir nutzen die “verallgemeinerte Homotopieinvarianz”, nämlich die Konstanz von $\lambda \mapsto d(f_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, p)$ sowie $d(f_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\lambda_0}, p) \neq 0$ sowie $d(f_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, p) = 0$ für große λ , um einen Widerspruch zu erhalten.



Die Konstruktion der offenen Umgebung aus (b) erfolgt mit dem Whyburn-Lemma. Der technische und rein topologische Beweis ist nicht weiter erhellend, weshalb hier nur das Resultat präsentiert wird. Wir verweisen auf [11, Lemma 29.1] oder [7, Theorem 19.4] für Details.

Lemma 2.11 (Whyburn). *Seien P, Q disjunkte abgeschlossene Teilmengen eines kompakten metrischen Raumes (E, d) . Dann gilt genau eine der folgenden zwei Alternativen:*

- (i) *Es existiert eine zusammenhängende Menge, die P und Q schneidet* oder
- (ii) *es existieren disjunkte kompakte Mengen $K_P, K_Q \subset E$ mit*

$$P \subset K_P, Q \subset K_Q \quad \text{und} \quad K_P \cup K_Q = E.$$

¹⁸Das bedeutet $\mathcal{C} = \{(x, \lambda) \in \Sigma : \text{Es existiert eine in } \Sigma \text{ zusammenhängende Menge } C \text{ mit } (p, 0) \in C \text{ und } (x, \lambda) \in C\}$. Es handelt sich um die Äquivalenzklasse des Punktes $(p, 0) \in \Sigma$ bezüglich der Relation $y \sim z : \Leftrightarrow y, z$ liegen in einer zusammenhängenden Menge. Eine Menge $C \subset \Sigma$ heißt zusammenhängend, wenn sie keine nichttriviale Zerlegung in (relativ) offene Menge besitzt, d.h. $C = C_1 \cup C_2$ mit C_1, C_2 disjunkt und $\Sigma \setminus C_1, \Sigma \setminus C_2$ abgeschlossen impliziert $\{C_1, C_2\} \subset \{\emptyset, C\}$.

Der Sinn dieses Lemmas besteht darin, dass man mit ihm Mengen P, Q voneinander trennen kann, sofern sie nicht in derselben Zusammenhangskomponente liegen, denn K_P, K_Q haben zueinander einen positiven Abstand. Wir wenden uns der im Teil (c) benötigten verallgemeinerten Homotopieinvarianz zu.

Proposition 2.12 (Verallgemeinerte Homotopieinvarianz). *Sei $F \in C(\overline{\Omega} \times I; X)$ kompakt und sei $\mathcal{O} \subset \overline{\Omega} \times I$ eine offene und beschränkte Teilmenge mit*

$$x - F(x, \lambda) \neq p \quad \text{für alle } x \in (\partial\mathcal{O})_\lambda, \lambda \in I \quad (2.3)$$

Dann ist $\lambda \mapsto d(\text{id} - F(\cdot, \lambda), \mathcal{O}_\lambda, p)$ (wohldefiniert und) konstant auf I .

Beweis:

Die Wohldefiniertheit von $d(\text{id} - F(\cdot, \lambda), \mathcal{O}_\lambda, p)$ folgt daraus, dass die Abbildung $x \mapsto x - F(x, \lambda)$ für jedes $\lambda \in I$ die Voraussetzungen (d) auf der offenen Menge $\mathcal{O}_\lambda \subset \Omega$ erfüllt. Beachte: Der Rand von \mathcal{O}_λ enthält keine Lösungen wegen¹⁹ $\partial(\mathcal{O}_\lambda) \subset (\partial\mathcal{O})_\lambda$ und (2.3). Da I ein Intervall ist und somit zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, dass die Abbildung $\lambda \mapsto d(\text{id} - F(\cdot, \lambda), \mathcal{O}_\lambda, p)$ auf I lokal konstant ist.

Sei also $\lambda \in I$ beliebig. Dann existiert ein $\varepsilon_\lambda > 0$ mit

$$\{x \in \mathcal{O}_\lambda : x - F(x, \mu) = p\} \subset \mathcal{O}_\mu \quad \text{für alle } \mu \in I \cap [\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda]. \quad (2.4)$$

Beweis: andernfalls gäbe es $\lambda_m \in I$ und $x_m \in \mathcal{O}_\lambda \setminus \mathcal{O}_{\lambda_m}$ mit $x_m - F(x_m, \lambda_m) = p$ und $\lambda_m \rightarrow \lambda$. Da (x_m, λ_m) beschränkt und F kompakt ist, konvergiert auch eine Teilfolge von (x_m, λ_m) gegen $(x, \lambda) \in \overline{\mathcal{O}}$. Andererseits liefert $x_m \notin \mathcal{O}_{\lambda_m}$ die Aussage $(x_m, \lambda_m) \notin \mathcal{O}$ und somit, da \mathcal{O} offen ist, $(x, \lambda) \notin \mathcal{O}$. Wir erhalten $(x, \lambda) \in \partial\mathcal{O}$ und somit

$$x \in (\partial\mathcal{O})_\lambda \quad \text{und} \quad x - F(x, \lambda) = p \quad \text{im Widerspruch zu (2.3).}$$

Es folgt für alle $\mu_1, \mu_2 \in I \cap [\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda]$

$$\begin{aligned} d(\text{id} - F(\cdot, \mu_1), \mathcal{O}_{\mu_1}, p) &\stackrel{(2.4)}{=} d(\text{id} - F(\cdot, \mu_1), \mathcal{O}_{\mu_1}, p) + d(\text{id} - F(\cdot, \mu_1), \mathcal{O}_\lambda \setminus \overline{\mathcal{O}_{\mu_1}}, p) \\ &= d(\text{id} - F(\cdot, \mu_1), \mathcal{O}_\lambda, p) \\ &= d(\text{id} - F(\cdot, \mu_2), \mathcal{O}_\lambda, p) \\ &= d(\text{id} - F(\cdot, \mu_2), \mathcal{O}_{\mu_2}, p) + d(\text{id} - F(\cdot, \mu_1), \mathcal{O}_\lambda \setminus \overline{\mathcal{O}_{\mu_2}}, p) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} d(\text{id} - F(\cdot, \mu_2), \mathcal{O}_{\mu_2}, p). \end{aligned}$$

Somit ist die lokale Konstanz und damit die globale Konstanz des Abbildungsgrads bewiesen. \square

Ende VL 7

¹⁹In der Tat gibt es für jedes $x \in \partial(\mathcal{O}_\lambda)$ Elemente $x_n \in \mathcal{O}_\lambda, y_n \in \mathcal{O}_\lambda^c$ mit $x_n, y_n \rightarrow x$. Wegen $(x_n, \lambda) \in \mathcal{O}, (y_n, \lambda) \in \mathcal{O}^c$ und \mathcal{O} offen folgt $(x, \lambda) \in \overline{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} = \partial\mathcal{O}$, also $x \in (\partial\mathcal{O})_\lambda$.

Die umgekehrte Inklusion gilt im Allgemeinen nicht: Sei $\mu \in (0, 1)$ beliebig. Die Menge $\mathcal{O} := \{(x, \lambda) \in (-2, 2) \times (0, 1) : \lambda = \mu \Rightarrow |x| < 1\}$ ist offen und es gilt $(\partial\mathcal{O})_\mu = [-2, -1] \cup [1, 2]$, aber $\partial(\mathcal{O}_\mu) = \{-1, 1\}$. Zu beachten ist, dass sich das Symbol ∂ einmal auf den Rand in $X \times \mathbb{R}$ und das andere Mal auf den Rand in X bezieht.

Wir kommen zum Fortsetzungssatz von Leray und Schauder [16, “Théorème fondamental” S.63].

Satz 2.13 (Fortsetzungssatz von Leray-Schauder, 1934). *Sei $\Omega \subset X$ eine offene beschränkte Menge eines Banachraums X , $p \in \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall und $f_\lambda(x) = x - F(x, \lambda)$ mit $F \in C(\overline{\Omega} \times I; X)$ kompakt und $F(\cdot, \lambda_0) \equiv 0$. Für die Zusammenhangskomponente \mathcal{C} von (p, λ_0) in Σ gilt dann*

$$\mathcal{C} \cap \partial(\Omega \times I) \neq \emptyset.$$

Beweis:

Wir führen die Annahme $\mathcal{C} \cap \partial(\Omega \times I) = \emptyset$ zum Widerspruch. Zunächst halten wir fest, dass \mathcal{C} kompakt ist²⁰. Daher finden wir $0 < \tilde{\delta} < \text{dist}(\mathcal{C}, \partial(\Omega \times I))$ und definieren die offene Umgebung

$$\tilde{\mathcal{O}} := B_{\tilde{\delta}}(\mathcal{C}) = \{(x, \lambda) \in \Omega \times I : \text{dist}((x, \lambda), \mathcal{C}) < \tilde{\delta}\}.$$

Per Konstruktion enthält $\tilde{\mathcal{O}}$ das Kontinuum \mathcal{C} und berührt $\partial(\Omega \times I)$ nicht. Um eine möglicherweise kleinere offene Umgebung zu bekommen, deren Rand keine Lösungen enthält, wenden wir das Whyburn-Lemma auf die kompakten Teilmengen

$$P := \mathcal{C}, \quad Q := \Sigma \cap \partial\tilde{\mathcal{O}}, \quad E := \Sigma \cap \overline{\tilde{\mathcal{O}}}$$

an. Die Teilmengen P, Q von E sind disjunkt. Zudem existiert keine zusammenhängende Menge, die sowohl P als auch Q schneidet, denn sonst wären Punkte aus P, Q in derselben Zusammenhangskomponente, also in \mathcal{C} . Dies hätte $Q \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ zur Folge im Widerspruch zu $\text{dist}(Q, \mathcal{C}) \geq \text{dist}(\partial\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{C}) = \tilde{\delta} > 0$. Das Whyburn-Lemma liefert disjunkte kompakte Mengen $K_P, K_Q \subset E$, die P bzw. Q enthalten und $E = K_P \cup K_Q$ erfüllen. Sei dann

$$\mathcal{O} := B_\delta(K_P) \quad \text{wobei } 0 < \delta < \text{dist}(K_P, K_Q).$$

Wegen $K_P \cup K_Q = E$ haben wir somit eine offene Umgebung von \mathcal{C} mit der Eigenschaft $\partial\mathcal{O} \cap \Sigma = \emptyset$ gefunden.

Es folgt für alle $\lambda \in \partial I$ wegen $p \in \Omega$ und Proposition 2.12

$$1 = d(\text{id}, \mathcal{O}_{\lambda_0}, p) = d(f_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\lambda_0}, p) = d(f_\lambda, \underbrace{\mathcal{O}_\lambda}_{=\emptyset}, p) = 0,$$

Widerspruch! □

Bemerkung 2.14. (a) Die Aussage des Fortsetzungssatzes lässt sich auch als Alternative formulieren: Es gilt

$$\Sigma \cap (\partial\Omega \times I) \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad \text{pr}(\mathcal{C}) = I.$$

²⁰Das ist eine Übungsaufgabe. Die Argumentation ist ähnlich wie im Beweis von Proposition 2.1.

Äquivalent:

$$\Sigma \cap (\partial\Omega \times I) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{pr}(\mathcal{C}) = I.$$

Diese Formulierung wird sehr häufig verwendet, da die Annahme $\Sigma \cap (\partial\Omega \times I) = \emptyset$ wie im Beispiel zu Beginn gut überprüft werden kann. Die Aussage ist daher, dass das Kontinuum den Rand von Ω durchstößt oder sich über das ganze Intervall I erstreckt.

- (b) Es existieren allgemeinere Varianten des Fortsetzungssatzes, in denen $\Omega \times I$ durch eine offene beschränkte Teilmenge $U \subset X \times \mathbb{R}$ ersetzt wird. Zudem zeigt der Beweis, dass $f_{\lambda_0} \equiv \text{id}$ nicht nötig ist, sondern nur $d(f_{\lambda_0}, U_{\lambda_0}, p) \neq 0$ entscheidend ist. (Dies liefert eine Verallgemeinerung des Satzes über implizit definierte Funktionen.)

Korollar 2.15. *Sei X ein Banachraum, $p \in X$ und $f_\lambda(x) = x - F(x, \lambda)$ mit $F \in C(X \times \mathbb{R}; X)$ kompakt und $F(\cdot, \lambda_0) \equiv 0$. Dann ist die Menge \mathcal{C} aus Satz 2.13 unbeschränkt.*

Beweis:

Wäre \mathcal{C} beschränkt, so gäbe es eine (große) offene Teilmenge $\Omega \subset X$ und ein $R > 0$ mit $\mathcal{C} \cap \partial(\Omega \times [-R, R]) = \emptyset$. Dies widerspricht Satz 2.13. \square

Durch eine leichte Modifikation des Beweises kann man sogar zeigen, dass jede der Teilmengen $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$ unbeschränkt ist, wobei $\mathcal{C}^\pm := \{(x, \lambda) \in \mathcal{C} : \pm \lambda \geq 0\}$.

Die Anwendung dieses Korollars auf das Beispiel zu Beginn liefert das folgende: angesichts der a-priori-Schranken $\|x\| < R := R = R(\|p\|, C\Lambda, \gamma)$ hatten wir

$$x - \lambda F(x) \neq p \quad \text{für alle } x \in \partial B_R(0), \lambda \in [0, \Lambda].$$

Aus dem Fortsetzungssatz von Leray-Schauder bzw. Bemerkung 2.14 (a) folgt für jedes $\Lambda > 0$ mit der Wahl $\Omega = B_R(0)$ die Aussage $\text{pr}(\mathcal{C}) \supset [0, \Lambda]$. Da $\Lambda > 0$ beliebig ist: $\text{pr}(\mathcal{C}) \supset [0, \infty)$. Daher existiert ein Kontinuum von Lösungen der Gleichung $x - \lambda F(x) = p$, das sich von $\lambda = 0$ bis $+\infty$ erstreckt und die Lösung $(x, \lambda) = (p, 0)$ enthält.

Ähnlich kann man argumentieren, wenn man Lösungen von Anfangswertproblemen der Form

$$x'(t) = \lambda g(x(t), t), \quad x(0) = x_0$$

betrachtet. Ist $g: \mathbb{R}^m \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und gilt $g(z, t) \cdot z \leq 0$ für alle $|z| \geq M, t \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die a-priori-Schranke $\|x\|_\infty \leq \max\{M, |x_0|\}$. Dies folgt aus der Abschätzung

$$\frac{d}{dt} |x(t)|^2 = 2\lambda g(x(t), t) \cdot x(t) \leq 0 \quad \text{falls } |x(t)| \geq M, t \geq 0, \lambda \geq 0,$$

für alle Lösungen der Differentialgleichung. Wählen wir daher $X = C([0, N]; \mathbb{R}^m)$ mit der Maximumnorm für ein beliebiges $N > 0$, so erhalten wir, dass die Differentialgleichung ein "nach rechts" unbeschränktes Kontinuum an Lösungen auf $[0, N]$ besitzt.

Ende VL 8

3 Ljusternik-Schnirelman-Theorie

Wir betrachten nun die Frage, wie die Existenz mehrerer Lösungen für Probleme der Form ($S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$)

$$\nabla I(x) = \lambda x \quad (x \in S, \lambda \in \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

bewiesen werden kann, wobei im Folgenden stets $I \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ein **gerades** Funktional ist, d.h. $I(x) = I(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Es sind möglichst viele Lösungspaare $(\pm x, \lambda)$ zu bestimmen. Die Lagrange'sche Multiplikatorenregel liefert 2 Paare von Lösungen dieses Problems, nämlich $\pm x_*$, $\pm x^* \in S$ mit $I(\pm x_*) = \min_S I$ und $I(\pm x^*) = \max_S I$. Im Allgemeinen, d.h. ohne Symmetrieannahme, existieren auch keine weiteren "kritischen Werte", wie etwa das Beispiel $I(x) = x_1$ zeigt. Wir werden sehen, dass die Symmetrie des Funktionals I dafür sorgt, dass stets mindestens n Lösungspaare existieren. Diese Aussage verallgemeinert die Tatsache, dass symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stets n linear unabhängige Eigenvektoren haben²¹. In der Tat ergibt sich dies aus der speziellen Wahl $I(x) = \frac{1}{2} x^T A x$. Bemerkenswert ist zudem, dass im Fall eines vielfachen Eigenwerts, etwa $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+k}$, nicht weniger Paare, sondern deutlich mehr davon existieren, nämlich die " k -dimensionale Menge", die durch den Schnitt des Eigenraums mit der Sphäre S entsteht. Wir werden sehen, dass eine ähnliche Aussage für allgemeine gerade Funktionale gilt.

Einige Bemerkungen:

- Ljusternik-Schnirelman-Theorie liefert ähnliche Aussagen in unendlichdimensionalen Banachräumen. Zum Beispiel kann man damit die Existenz unendlich vieler Lösungen $(\lambda, \pm u)$ für elliptische partielle Differentialgleichungen beweisen, etwa

$$-\Delta u = \mu(u + \sin(u)) \quad (u \in H_0^1(\Omega))$$

Dieses Problem ist der Form (3.1) für $I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} u^2 + \cos(u) dx$ und $\lambda := 1/\mu$. Das Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ ist $\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx$. Entscheidend ist hierbei, dass I die sogenannte Palais-Smale-Bedingung (eine Kompaktheitsbedingung) erfüllt.

- Gerade Funktionale $I \in C^2(\mathbb{R}^n)$ können mehr als n kritische Paare haben. Ein Beispiel ist $I(x, y) = x^2 y^2$: Es existieren $4 = 2n$ Paare kritischer Punkte, nämlich

$$(\lambda, x, y) \in \left\{ (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (1, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}), (1, \pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}) \right\}.$$

- Sei $I(x) := x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2$. Explizite Rechnungen zeigen, dass alle Lösungen von (3.1) gegeben sind durch

$$(\lambda, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in \mathbb{R} \quad \text{oder}$$

²¹Beachte: Allgemeine quadratische Matrizen haben im Allgemeinen nicht n linear unabhängige Eigenvektoren, sondern nur Hauptvektoren gemäß der Jordan'schen Normalform von A .

$$(\lambda, x_1, x_2, x_3) = (1, \pm 1/\sqrt{2}, \cos(\theta)/\sqrt{2}, \sin(\theta)/\sqrt{2}), \theta \in \mathbb{R}$$

Hier sehen wir, dass auch im Fall eines nichtquadratischen Funktionals eine höherdimensionale Menge von Lösungen existieren kann.

- Die Lösungen werden nicht auf dem Niveau des Minimums $\min_S I$ oder des Maximums $\max_S I$ gesucht, sondern (notwendigerweise) dazwischen. Das führt zu sogenannten $\min - \max$ -Charakterisierungen der kritischen Werte.
- Aus (3.1) und $x \in S$ folgt $\lambda = \langle \nabla I(x), x \rangle$. Daher kann man (3.1) auch schreiben als $\nabla_S I = 0$, wobei $\nabla_S I(x) := \nabla I(x) - \langle \nabla I(x), x \rangle x$.
- Allgemeiner lassen sich mit Ljusternik-Schnirelman-Theorie Probleme der Form $I'(x) = \lambda J'(x)$ untersuchen, wobei J ebenfalls ein gerades Funktional ist. Wichtig ist, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : J(x) = c\}$ eine kompakte symmetrische C^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist.

Das abstrakte Werkzeug für dieses Problem ist der **Genus**, der nach Wissen des Autors von Krasnoselski in der Arbeit [15] eingeführt wurde, um die Existenz kritischer Punkte gerader Funktionale zu beweisen²². Wir definieren zunächst

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : A \text{ abgeschlossen}, A = -A\}.$$

Definition 3.1 (Genus). Sei $\gamma(\emptyset) := 0$ und für $A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset$

$$\gamma(A) := \min \{k \in \mathbb{N} : \text{Es existiert eine ungerade Funktion } \eta \in C(A; \mathbb{R}^k \setminus \{0\})\}.$$

Eine solche ungerade Funktion kann nur existieren, wenn $0 \notin A$ gilt, denn jede ungerade Funktion erfüllt $\eta(0) = 0$. Der Genus misst in einem gewissen Sinne die Größe einer Menge A .

Proposition 3.2. Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

- (i) A endlich $\Rightarrow \gamma(A) = 1$,
- (ii) $\gamma(A) \leq n$,
- (iii) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$,
- (iv) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$,
- (v) Falls A kompakt ist, existiert eine symmetrische offene Umgebung U_A von A mit $\gamma(\overline{U_A}) = \gamma(A)$,

²²Die Ursprünge dieser Methode gehen auf Ljusternik und Schnirelman [17] zurück, die mit dem topologischen Begriff der “Kategorie” (https://en.wikipedia.org/wiki/Lusternik-Schnirelmann_category) arbeiteten, um die Existenz von Geodätischen auf kompakten Mannigfaltigkeiten (ohne jedwede Symmetrieannahme) zu beweisen. Krasnoselskis konkretisierte diese Ideen für gerade Funktionale und erhielt stärkere Existenzaussagen. Im russischen Original heißt Krasnoselskis Artikel “Об оценке количества критических точек функционалов” [15]. Krasnoselski schreibt “Множество рода n ”, also “Menge vom Geschlecht (=Genus) n ”. Im Laufe der Zeit etablierte sich der auch für westliche Zungen aussprechbare Begriff “genus”, siehe etwa [9].

(vi) Ist $\psi : A \rightarrow B$ ein ungerader Homöomorphismus, dann $\gamma(A) = \gamma(B)$.

Beweis:

- (i) Für $A = \{x_1, -x_1, \dots, x_m, -x_m\}$ sei $\eta : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben durch $\eta(\pm x_j) := \pm 1$. Diese Funktion ist ungerade und stetig, denn A ist diskret.
- (ii) Es gilt $\text{id} : A \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und id ist ungerade, also $\gamma(A) \leq n$.
- (iii) Sei $m_1 := \gamma(A), m_2 := \gamma(B)$ und ungerade Abbildungen $\eta_1 \in C(A; \mathbb{R}^{m_1} \setminus \{0\}), \eta_2 \in C(B; \mathbb{R}^{m_2} \setminus \{0\})$. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze²³ existieren oBdA ungerade Fortsetzungen $\Xi_1 : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, \Xi_2 : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ mit $\Xi_1|_A = \eta_1, \Xi_2|_B = \eta_2$. Betrachte dann

$$\eta : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^{m_1+m_2}, \quad x \mapsto (\Xi_1(x), \Xi_2(x)).$$

Da Ξ_1, Ξ_2 ungerade sind, ist auch η ungerade. Ferner ist η nullstellenfrei, denn im Fall $x \in A, \eta(x) = 0$ wäre $\eta_1(x) = \Xi_1(x) = 0$, was unmöglich ist. Ähnlich führt $x \in B, \eta(x) = 0$ zum Widerspruch. Folglich gilt $\eta : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^{m_1+m_2} \setminus \{0\}$ und somit $\gamma(A \cup B) \leq m_1 + m_2 = \gamma(A) + \gamma(B)$.

- (iv) Ist $m \in \mathbb{N}$ und $\eta \in C(B; \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ ungerade, so ist $\eta|_A \in C(A; \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ ungerade, also $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
- (v) Sei $m := \gamma(A) < \infty$ und $\eta \in C(A; \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ ungerade. Diese Funktion sei mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Tietze auf \mathbb{R}^n ungerade und stetig fortgesetzt. Da A kompakt ist, gilt $|\eta(x)| \geq 2\delta$ für ein $\delta > 0$ und sei $U_A := \{x \in \mathbb{R}^n : |\eta(x)| > \delta\}$. Dann ist U_A symmetrisch, $A \subset U_A$ und $\eta \in C(\overline{U_A}; \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$. Hieraus folgt $m = \gamma(A) \leq \gamma(\overline{U_A}) \leq m$ und somit $\gamma(\overline{U_A}) = m$.
- (vi) Sei $m := \gamma(B)$ und $\eta \in C(B; \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ ungerade. Dann ist $\eta \circ \psi : A \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ungerade und es folgt $\gamma(A) \leq m = \gamma(B)$. Die entsprechende Argumentation mit vertauschten Rollen und ψ^{-1} statt ψ liefert $\gamma(B) \leq \gamma(A)$ und somit die Behauptung.

□

Ende VL 9

Der Punkt (vi) der obigen Proposition ist entscheidend, denn er impliziert $\gamma(A) = \gamma(\Psi(t, A))$ für alle $t \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}$, wobei Ψ den *negativen Gradientenfluss* bezeichnet. Dieser ist definiert durch

$$\frac{d}{dt} \Psi(t, x) = -\nabla_S I(\Psi(t, x)), \quad \Psi(0, x) = x. \quad (3.2)$$

Die Bedeutung dieser Abbildung begründet sich dadurch, dass $t \mapsto I(\Psi(t, x))$ monoton fallend ist und erst in kritischen Punkten stationär wird. Durch "Verfolgung" des negativen Gradientenflusses stößt man daher auf kritische Punkte von $I|_S$, d.h. auf Elemente der Menge

$$K_c := \{x \in S : \nabla_S I(x) = 0, I(x) = c\}.$$

²³Eine einfache Variante dieses Satzes [23] lautet wie folgt: "Sei X ein Banachraum und $A \subset X$ abgeschlossen, $f \in C(A; \mathbb{R})$. Dann existiert eine stetige Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$."

(Entsprechende Aussagen gelten für den positiven Gradientenfluss.) Das folgende Deformationslemma besagt, dass bei hinreichendem Abstand zu K_c die Subniveaumengen $\{I \leq c + \varepsilon\} := \{x \in S : I(x) \leq c + \varepsilon\}$ durch den Gradientenfluss in Teilmengen von $\{I \leq c - \varepsilon\}$ deformiert werden, wenn $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Lemma 3.3 (Deformationslemma). *Sei U eine offene Umgebung²⁴ von K_c , $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein ungerader Homöomorphismus $\psi \in C(S; S)$ mit*

$$\psi(\{I \leq c + \varepsilon\} \setminus U) \subset \{I \leq c - \varepsilon\}.$$

Beweis:

Für jedes $x \in S$ betrachten wir den negativen Gradientenfluss wie in (3.2). Die Existenz und Eindeutigkeit dieser Funktion folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, denn $z \mapsto \nabla_S I(z)$ ist Lipschitz-stetig wegen $I \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Da U eine offene Umgebung von K_c ist, existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft (Widerspruchsbeweis!)

$$|\nabla_S I(z)| \geq \delta, \quad \text{falls } \text{dist}(z, U^c) \leq \delta \text{ und } |I(z) - c| \leq \delta. \quad (3.3)$$

Wir wählen

$$\varepsilon := \min \left\{ \delta, \frac{\delta^3}{2M} \right\} \quad \text{für } M := \max_{z \in S} |\nabla_S I(z)|. \quad (3.4)$$

Die Funktion Ψ hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\Psi(t, x) \in S$ für alle $t \geq 0$. In der Tat gilt für $Z_x(t) := |\Psi(t, x)|^2 - 1$

$$\begin{aligned} Z'_x(t) &= 2\Psi(t, x) \cdot \frac{d}{dt} \Psi(t, x) \\ &= -2\Psi(t, x) \cdot \nabla_S I(\Psi(t, x)) \\ &= -2\Psi(t, x) \cdot [\nabla I(\Psi(t, x)) - (\nabla I(\Psi(t, x)) \cdot \Psi(t, x)) \Psi(t, x)] \\ &= -2(\nabla I(\Psi(t, x)) \cdot \Psi(t, x)) Z_x(t). \end{aligned}$$

Da der Vorfaktor stetig bzgl. t ist und $Z_x(0) = 0$ gilt, folgt $Z_x \equiv 0$. Daher gilt $\Psi(t, x) \in S$ für alle $t \geq 0$, solange die Lösung existiert. Da wiederum $\nabla_S I$ beschränkt auf S ist, folgt, dass die Lösung für alle Zeiten t existiert und somit $\Psi(t, x) \in S$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in S$ gilt.

- (ii) Es gilt $\Psi(t, x) = -\Psi(t, -x)$ für alle $t \geq 0, x \in S$. Das folgt daraus, dass $\nabla_S I$ ungerade ist und somit $t \mapsto \Psi(t, x)$ und $t \mapsto -\Psi(t, -x)$ dasselbe Anfangswertproblem (3.2) lösen. Da dessen Lösung eindeutig ist, folgt die Behauptung.
- (iii) Für $x \in S, t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I(\Psi(t, x))) &= \nabla I(\Psi(t, x)) \cdot \frac{d}{dt} \Psi(t, x) \\ &= -\nabla I(\Psi(t, x)) \cdot \nabla_S I(\Psi(t, x)) \end{aligned}$$

²⁴Im Fall $K_c = \emptyset$ ist $U = \emptyset$ eine mögliche Wahl.

$$\begin{aligned}
&= -|\nabla I(\Psi(t, x))|^2 + |\nabla I(\Psi(t, x)) \cdot \Psi(t, x)|^2 \\
&= -|\nabla_S I(\Psi(t, x))|^2.
\end{aligned}$$

Für $x \in U^c = S \setminus U$ und $0 \leq t \leq T := \delta M^{-1}$ gilt zudem

$$\begin{aligned}
\text{dist}(\Psi(t, x), U^c) &\leq \text{dist}(x, U^c) + \left| \int_0^t \Psi_t(s, x) ds \right| \\
&\leq \int_0^t |\Psi_t(s, x)| ds \\
&\leq \int_0^T |\nabla_S I(\Psi(s, x))| ds \\
&\leq MT = \delta.
\end{aligned}$$

Daher gilt für alle $x \in \{c - \delta \leq I \leq c + \varepsilon\} \setminus U$ und alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
I(\Psi(T, x)) &= I(\Psi(0, x)) + \int_0^T \frac{d}{ds} (I(\Psi(s, x))) ds \\
&= I(x) - \int_0^T |\nabla_S I(\Psi(s, x))|^2 ds \\
&\stackrel{(3.3)}{\leq} c + \varepsilon - \int_0^T \delta^2 ds \\
&= c + \varepsilon - T\delta^2 \\
&= c + \varepsilon - M^{-1}\delta^3 \\
&\stackrel{(3.4)}{\leq} c - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Für $x \in \{I \leq c - \delta\} \setminus U \subset \{I \leq c - \varepsilon\}$ folgt diese Ungleichung bereits aus der Monotonie von $t \mapsto I(\Psi(t, x))$. Wir erhalten somit $I(\Psi(T, x)) \leq c - \varepsilon$ für alle $x \in \{I \leq c + \varepsilon\} \setminus U$.

Wir definieren daher $\psi(x) := \Psi(T, x)$. Dann ist $\psi : S \rightarrow S$ stetig und ungerade wegen (ii). Es handelt sich um einen Homöomorphismus, denn $\psi^{-1}(z) = \Psi(-T, z)$ für alle $z \in S$. Wegen (i) und (iii) gilt zudem $\psi(\{I \leq c + \varepsilon\} \setminus U) \subset \{I \leq c - \varepsilon\}$, was zu zeigen war. \square

Ende VL 10

Satz 3.4. Sei $I \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gerade. Dann existieren mindestens n verschiedene Lösungstupel $(\pm x_1, \lambda_1), \dots, (\pm x_n, \lambda_n)$ von (3.1).

Beweis:

Wir definieren für $j = 1, \dots, n$

$$c_j := \inf_{A \in \Gamma_j} \max_A I \quad \text{wobei } \Gamma_j := \{A \subset S : A \in \mathcal{A} \text{ und } \gamma(A) \geq j\}$$

Dann gilt $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \dots \subset \Gamma_1 \neq \emptyset$ und somit $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$.

Zunächst zeigen wir, dass jedes c_j ein kritischer Wert ist. Andernfalls gilt $K_{c_j} = \emptyset$. Das Deformationslemma für $K_{c_j} = U = \emptyset$ liefert ein $\varepsilon > 0$ und einen stetigen ungeraden

Homöomorphismus $\psi \in C(S; S)$ mit $\psi(\{I \leq c_j + \varepsilon\}) \subset \{I \leq c_j - \varepsilon\}$. Wählen wir daher ein $A \in \Gamma_j$ mit $\max_A I \leq c_j + \varepsilon$ (gemäß der Definition von c_j), so gilt $A \subset \{I \leq c_j + \varepsilon\}$ und somit

$$\max_{\psi(A)} I \leq c_j - \varepsilon \quad \text{sowie} \quad \gamma(\psi(A)) = \gamma(A) \geq j,$$

vgl. Proposition 3.2 (vi). Dies widerspricht aber der Definition von c_j und somit der Annahme. Daher ist jedes c_j ein kritischer Wert. Insbesondere erhalten wir im Fall $c_1 < \dots < c_n$ die Existenz von mindestens n Paaren von Lösungen.

Es bleibt der Fall $c_j = \dots = c_{j+k} =: c$ für $j, k \geq 1$ zu analysieren. Wir zeigen, dass in diesem Fall $\gamma(K_c) \geq k + 1 \geq 2$ gilt und insbesondere K_c wegen Proposition 3.2 (i) unendlich viele Punkte enthält. Diese (viel stärkere) Aussage impliziert dann die Behauptung. Nach Proposition 3.2 (v) existiert eine offene Umgebung U von K_c mit $\gamma(\overline{U}) = \gamma(K_c)$. Nach dem Deformationslemma existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein ungerader Homöomorphismus $\psi \in C(S; S)$ mit $\psi(\{I \leq c + \varepsilon\} \setminus U) \subset \{I \leq c - \varepsilon\}$. Per Definition von $c_{j+k} = c$ existiert ein $A \in \Gamma_{j+k}$ mit $A \subset \{I \leq c + \varepsilon\}$, also $\psi(A \setminus U) \subset \{I \leq c - \varepsilon\}$. Aus der Definition von $c = c_j$ erhalten wir daher $\gamma(\psi(A \setminus U)) \leq j - 1$. Wir erhalten

$$j + k \leq \gamma(A) \leq \gamma(A \setminus U) + \gamma(\overline{U}) = \gamma(\psi(A \setminus U)) + \gamma(\overline{U}) \leq j - 1 + \gamma(K_c).$$

Es folgt $\gamma(K_c) \geq k + 1$, was zu zeigen war. □

Aufgaben:

- (1) Zeigen Sie $\gamma(A) = 1$ für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $A = B \cup (-B)$ und $B \cap (-B) = \emptyset$.
- (2) Zeigen Sie mit Hilfe des Antipodensatzes $\gamma(\partial\Omega) = n$, falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte und symmetrische Umgebung des Ursprungs ist.
- (3) Im Beweis von Satz 3.4: Zeigen Sie $c_1 = \min_S I$ und $c_n = \max_S I$.

4 Notation

Kapitel 1:

- Ω = offene beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n
- $p \notin M$ = Kurzform von $p \in \mathbb{R}^n \setminus M$ falls $M \subset \mathbb{R}^n$
- $f(\partial\Omega) = \{f(x) : x \in \partial\Omega\}$
- $\text{supp}(f)$ = der Träger einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, also $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$
- $f'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ = Jacobimatrix einer im Punkt x differenzierbaren Funktion f
- Für $K \subset \mathbb{R}^n$: $\text{dist}(p, K) = \inf\{|p - q| : q \in K\}$. Für $K = \overline{K} \neq \emptyset$ ist das Infimum ein Minimum
- $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$
- $C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ = die Menge der k -fach in Ω differenzierbaren Funktionen mit Wertebereich \mathbb{R}^n , deren Ableitungen der Ordnung $0, \dots, k$ stetig auf den Rand fortsetzbar sind; somit $C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \subset C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$
- $C^k(U)$ = die Menge der k -fach in U differenzierbaren Funktionen mit Wertebereich \mathbb{R}
- $C_0^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ ist die Menge der Funktionen $f \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, die in einer offenen Umgebung von $\partial\Omega$ verschwinden (d.h. dort nur den Funktionswert 0 annehmen); mit anderen Worten: $\text{dist}(\text{supp}(f), \partial\Omega) > 0$

Kapitel 2:

- $(X, \|\cdot\|)$ = ein Banachraum
- Ω = offene beschränkte Teilmenge von X
- $p \notin M$ = Kurzform von $p \in X \setminus M$ falls $M \subset X$
- $f(\partial\Omega), \text{supp}(f), \text{dist}(p, K)$ analog zu den Definitionen aus Kapitel 1.
- $C(\overline{\Omega}; X)$ = die Menge der auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen mit Wertebereich X .
- I_k = die Einheitsmatrix in \mathbb{R}^k
- I = beschränktes abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R}
- Σ = Lösungsmenge der Gleichung $f_\lambda(x) = p$ in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$
- \mathcal{C} = ein Kontinuum in $\Sigma \subset X \times \mathbb{R}$, d.h. eine abgeschlossene zusammenhängende Menge
- \mathcal{O} = eine offene Umgebung von \mathcal{C} , deren Rand keine Elemente aus Σ enthält.
- $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in X : (x, \lambda) \in \mathcal{O}\}$ = der Schnitt der Menge \mathcal{O} zum Parameterwert λ
- $\text{pr}(\mathcal{C}) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (x, \lambda) \in \mathcal{C}\}$ = die Projektion einer Teilmenge $\mathcal{C} \subset X \times \mathbb{R}$ auf den Parameterbereich.

Kapitel 3:

- $\gamma(A)$ = der Genus einer Menge A
- S = die Einheitssphäre in \mathbb{R}^n
- $\nabla_S I(x) = \nabla I(x) - \langle \nabla I(x), x \rangle x$
- Ein kritischer Wert $c \in \mathbb{R}$ erfüllt $\{x \in S : \nabla_S I(x) = 0, I(x) = c\} \neq \emptyset$, d.h. die Niveau-Menge $\{x \in S : I(x) = c\}$ enthält einen kritischen Punkt $x \in S$.

Literatur

- [1] Herbert Amann and Stanley A. Weiss. On the uniqueness of the topological degree. *Math. Z.*, 130:39–54, 1973.
- [2] Antonio Ambrosetti and Andrea Malchiodi. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, volume 104 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] Cesare Arzelà. Sulle funzioni di linee. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat.*, 5(5):55–74, 1895.
- [4] Giulio Ascoli. Le curve limite di una varietà data di curve. *Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 18(3):521–586, 1884.
- [5] Karol Borsuk. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Mathematicae*, 20(1):177–190, 1933.
- [6] Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71(1):97–115, 1911.
- [7] Robert F. Brown. *A topological introduction to nonlinear analysis*. Springer, Cham, third edition, 2014.
- [8] Kung-Ching Chang. *Methods in nonlinear analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [9] Charles V. Coffman. Lyusternik-Schnirelman theory and eigenvalue problems for monotone potential operators. *J. Functional Analysis*, 14:237–252, 1973.
- [10] Marco Degiovanni. Introduzione ai metodi topologici dell’analisi non lineare. Skript. <http://www.dmf.unicatt.it/~degiova/download/an1.html>.
- [11] Klaus Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [12] J. Dugundji. An extension of Tietze’s theorem. *Pacific J. Math.*, 1:353–367, 1951.
- [13] Wolfgang Gromes. Ein einfacher Beweis des Satzes von Borsuk. *Math. Z.*, 178(3):399–400, 1981.
- [14] Erhard Heinz. An elementary analytic theory of the degree of mapping in n -dimensional space. *J. Math. Mech.*, 8:231–247, 1959.

- [15] M. A. Krasnoselskiĭ. On the estimation of the number of critical points of functionals. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 7(2(48)):157–164, 1952.
- [16] Jean Leray and Jules Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 51:45–78, 1934.
- [17] L. Ljusternik and L. Schnirelman. Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 2(1(17)):166–217, 1947.
- [18] John Nash. Non-cooperative games. *Ann. of Math. (2)*, 54:286–295, 1951.
- [19] G. Peano. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Math. Ann.*, 37(2):182–228, 1890.
- [20] Emile Picard. Sur les Méthodes d'Approximations Successives dans la Théorie des Equations Différentielles. *Amer. J. Math.*, 20(1):87–100, 1898.
- [21] Arthur Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48:883–890, 1942.
- [22] Julius Schauder. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Math. Z.*, 26(1):47–65, 1927.
- [23] Heinrich Tietze. Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind. *J. Reine Angew. Math.*, 145:9–14, 1915.
- [24] Karl Weierstrass. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 633–638, 1885.