Analysis III Kurzskript

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Institut für Analysis

Karlsruher Institut für Technologie

WS 2009/2010

Inhalt

Kapitel 1

Abstrakte Maß- und Integrationstheorie

1.1 $\overline{\mathbb{R}}$ (erweitertes reelles Zahlensystem)

Definition 1.1. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *heißt erweitertes reeles Zahlensystem.*
Wir benutzen folgende Schreibweisen: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ *sowie*
$[a, \infty] := [a, \infty) \cup \{+\infty\}$, $[-\infty, a] := (-\infty, a] \cup \{-\infty\}$ *falls* $a \in \mathbb{R}$
analog $(a, \infty], [-\infty, a)$.
$\forall\, a \in \mathbb{R}$ *definiert man* $a + \infty = \infty + a := \infty$, $a - \infty = -\infty + a := -\infty$
$\infty - \infty$ *ist nicht definiert*

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{falls} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{falls} \quad a < 0 \\ 0 & \text{falls} \quad a = 0 \end{cases}$$

$\forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *sei* $[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$, *analog* $[a, b), (a, b], (a, b)$.

Definition 1.2. *Auf* $\overline{\mathbb{R}}$ *werden folgende Mengen als offen erklärt*

$$(*) \qquad [-\infty, a), \quad (b, \infty], \quad (a, b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},$$

sowie deren beliebige Vereinigungen.

Übung: U offen in $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow U$ ist höchstens abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $(*)$.

Definition 1.3. *Eine Funktion* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt stetig, falls für jede offene Menge* $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ *gilt:* $f^{-1}(V) \subset D$ *ist relativ offen in* D, *d.h. es existiert eine offene Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $f^{-1}(V) = U \cap D$.

Beispiel (Übung):

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(b) $g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \end{cases}$ hat keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

Hinweis zu (a): Es genügt zu zeigen: $f^{-1}(I)$ offen für offene Mengen der Form $I = (a,b), (a,\infty], (-\infty, b)$, denn $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(I_\alpha)$. Benutze das Resultat der Übung nach Definition 1.2

1.2 σ-Algebren und Meßbarkeit

Gegeben: Grundmenge X. $\mathcal{P}(X)$ = Menge aller Teilmengen von X.

Definition 1.4. *Ein Mengensystem $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra über X falls gilt*

(a) $X \in \mathfrak{M}$,

(b) aus $A \in \mathfrak{M}$ folgt $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{M}$,

(c) falls $A_i \in \mathfrak{M} \ \forall\, i \in \mathbb{N}$ dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ heißen meßbare Mengen. *Das Paar $(X, \mathfrak{M})$ heißt meßbarer Raum.*

Definition 1.5. *Sei $\mathfrak{M}$ σ-Algebra über X. Eine Funktion $f : X \to Y$ mit $Y = \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, heißt meßbar, falls für jede offene Menge $V \subset Y$ gilt: $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$.*

Korollar 1.6 (Eigenschaften meßbarer Mengen)**.**

(i) $\emptyset \in \mathfrak{M}$

(ii) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}$

(iii) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$ falls $A_i \in \mathfrak{M} \ \forall\, i \in \mathbb{N}$, denn $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c$.

Korollar 1.7 (Eigenschaften meßbarer Funktionen)**.**

(i) $f : X \to \mathbb{R}^p$ *meßbar,* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *stetig* $\Rightarrow g \circ f : X \to \mathbb{R}^q$ *meßbar. Gleiches gilt, wenn* $\mathbb{R}^p$ *bzw.* $\mathbb{R}^q$ *durch* $\overline{\mathbb{R}}/\mathbb{C}$ *ersetzt wird.*

(ii) $u, v : X \to \mathbb{R}$ *meßbar,* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *stetig* $\Rightarrow$ *die Funktion* $h : X \to \mathbb{R}^2$ *definiert durch* $h(x) = \phi(u(x), v(x)), x \in X$ *ist meßbar.*

(iii) $u, v : X \to \mathbb{R}$ *meßbar* $\Rightarrow u + iv : X \to \mathbb{C}$ *meßbar.*

(iv) $w : X \to \mathbb{C}$ *meßbar* $\Rightarrow$ *Re*w*, Im*w*,* $|w| : X \to \mathbb{R}$ *meßbar.*

(v) $w_1, w_2 : X \to \mathbb{C}$ *meßbar* $\Rightarrow w_1 + w_2,\ w_1 \cdot w_2 : X \to \mathbb{C}$ *meßbar.*

(vi) Sei $E \subset X$ *und* $\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ 1 & x \in E \end{cases}$ *die charakteristische Funktion der Menge* E*. Dann gilt:* χ_E *meßbar* $\Leftrightarrow E \in \mathfrak{M}$*.*

Satz 1.8. *Sei* $(X, \mathfrak{M})$ *ein meßbarer Raum und* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Dann gilt*

$$f \text{ meßbar } \Leftrightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ ist } f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}.$$

Erinnerung: Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{i\geq 1}\{\inf_{k\geq i} a_k\}, \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{i\geq 1}\{\sup_{k\geq i} a_k\}.$$

Gleiches gilt für Zahlenfolgen in $\overline{\mathbb{R}}$. Für Funktionenfolgen $f_n : X \to \mathbb{R}$ setzt man

$$\forall\, x \in X \quad \left(\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$
$$\forall\, x \in X \quad \left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Satz 1.9. *Sei* $(X, \mathfrak{M})$ *meßbarer Raum und* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *meßbar* $\forall\, n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt: die Funktionen*

$$G = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad H = \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$$
$$g = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad h = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

sind meßbar.

Korollar 1.10. $(X, \mathfrak{M})$ *sei ein meßbarer Raum.*

(a) *Falls* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *meßbar ist* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *und* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *für alle* $x \in X$ *existiert, dann ist* f *meßbar.*

(b) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *meßbar* $\Rightarrow$ $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = -\min\{f, 0\}, |f|$ *meßbar.*

1.3 Positive Maße

Definition 1.11. *Sei* $(X, \mathfrak{M})$ *ein meßbarer Raum. Eine Funktion* $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ *heißt positives Maß, falls gilt:*

(a) *es gibt eine Menge* $A \in \mathfrak{M}$ *mit* $\mu(A) < +\infty$,

(b) $A_i \in \mathfrak{M}\ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$ *und* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *heißt Maßraum.*

Beispiele:

1) (Dirac-Maß) Sei $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ und $x_0 \in X$ fest gewählt. Für $A \in \mathfrak{M}$ sei

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 0, & x_0 \notin A \\ 1, & x_0 \in A \end{cases}.$$

2) (Zählmaß) Sei $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$. Für $A \in \mathfrak{M}$ sei

$$\mu(A) = \begin{cases} \sharp(A) & \text{falls } A \text{ nur endlich viele Elemente enthält} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

$\sharp(A)$ =Anzahl der Elemente von A.

3) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mu = \frac{1}{6}\cdot$Zählmaß. $A = \{1, 3, 5\}$ =Ereignis, daß 1,3 oder 5 gewürfelt wird. $\mu(A) = \frac{1}{2}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$. μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Satz 1.12 (Eigenschaften von Maßen)**.** *Sei* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *Maßraum.*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, \ldots, A_n$ *paarweise disjunkt* $\Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

(3) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(4) $\forall\, i \in \mathbb{N}$ *sei* $A_i \in \mathfrak{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(5) $\forall\, i \in \mathbb{N}$ *sei* $A_i \in \mathfrak{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ *und* $\mu(A_1) < \infty$
$\Rightarrow \mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

Achtung: $X = \mathbb{N}$, $\mu =$Zählmaß, $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, $0 = \mu(A) \neq \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i) = \infty$, d.h. die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ ist wichtig in Satz 1.12 (5).

1.4 Elementarfunktionen

Definition 1.13. *Eine reellwertige Funktion* $s : X \to \mathbb{R}$ *heißt Elementarfunktion, falls* s *nur endlich viele Werte annimmt. Falls* $s(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, *definiere* $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, $i = 1, \ldots, k$. *Damit besitzt* s *die Darstellung*

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Lemma 1.14. *Sei* $(X, \mathfrak{M})$ *meßbarer Raum,* $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ *eine Elementarfunktion. Dann gilt:* s *meßbar* $\Leftrightarrow$ $A_1, \ldots, A_k$ *meßbar.*

Aufgabe: Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $x_0 > 0$. Die Funktion $\varphi : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x < x_0, \\ b, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann ist $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$ messbar.
Lösung: $h = \varphi \circ f$, $h^{-1}((\alpha, \infty]) = f^{-1}(\varphi^{-1}((\alpha, \infty]))$ und

$$\varphi^{-1}((\alpha, +\infty]) = \begin{cases} \emptyset & b \leq \alpha \\ [x_0, \infty] & a \leq \alpha < b \\ [0, \infty] & \alpha < a. \end{cases}$$

In jedem Fall ist das Urbild $\varphi^{-1}((\alpha, +\infty])$ eine abgeschlossene Menge. Da für abgeschlossene Mengen $A \subset [0, \infty]$ gilt, daß $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$, folgt die Meßbarkeit von h.

Satz 1.15. *Sei $(X, \mathfrak{M})$ meßbarer Raum und $f : X \to [0, \infty]$ meßbar. Dann existieren meßbare Elementarfunktionen $s_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:*

(a) $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$

(b) $\forall\, x \in X$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

1.5 Integration positiver Funktionen

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 1.16.

(a) $s : X \to [0, \infty)$ *sei meßbare Elementarfunktion mit* $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$. *Für* $A \in \mathfrak{M}$ *definiere*

$$\int_A s \; d\mu := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap A).$$

(b) *Sei* $f : X \to [0, \infty]$ *meßbar und*

$$\mathcal{S} = \{s : X \to [0, \infty), s \text{ meßbare Elementarfunktion, } 0 \le s \le f \text{ auf } X\}.$$

Für $A \in \mathfrak{M}$ *definiere*

$$\int_A f \; d\mu := \sup_{s \in \mathcal{S}} \int_A s \; d\mu.$$

$\int_A f \; d\mu$ *heißt Integral von* f *über* A *bezüglich* μ.

Satz 1.17 (Eigenschaften des Integrals)**.** *Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. $f, g : X \to [0, \infty]$ seien meßbar und $A, B \in \mathfrak{M}$. Dann gilt:*

(a) $f \le g \Rightarrow \int_A f \; d\mu \le \int_A g \; d\mu$

(b) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \; d\mu \le \int_B f \; d\mu$

(c) $\int_A f \; d\mu = \int_X f \cdot \chi_A \; d\mu$

(d) $c \in [0, \infty] \Rightarrow \int_A cf \; d\mu = c \int_A f \; d\mu$

(e) $f(x) = 0 \; \forall \; x \in A \Rightarrow \int_A f \; d\mu = 0$ *(selbst wenn* $\mu(A) = \infty$*)*

(f) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \; d\mu = 0$ *(selbst wenn* $f \equiv +\infty$*).*

Lemma 1.18. *Sei* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *ein Maßraum.*

(a) Ist $s : X \to [0, \infty)$ *messbare Elementarfunktion, dann wird für* $A \in \mathfrak{M}$ *durch* $\nu(A) := \int_A s \; d\mu$ *ein Maß* ν *auf* $\mathfrak{M}$ *erklärt.*

(b) Sind $s, t : X \to [0, \infty)$ *messbare Elementarfunktionen, dann gilt*

$$(*) \qquad \int_A (s + t) \; d\mu = \int_A s \; d\mu + \int_A t \; d\mu \quad \forall \; A \in \mathfrak{M}.$$

1.6 Vertauschung von Integration und Grenzübergängen; Integration reell- bzw. komplexwertiger Funktionen

Es sei stets $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ Maßraum.

Satz 1.19 (Satz über monotone Konvergenz)**.**
Falls gilt:

(i) $\forall \; n \in \mathbb{N}$ *ist* $f_n : X \to [0, \infty]$ *meßbar*

(ii) $\forall \; n \in \mathbb{N}$ *ist* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \; \forall \; x \in X$

dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $f : X \to [0, \infty]$ *meßbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu.$$

Korollar 1.20. *Sei* $f_n : X \to [0, \infty]$ *meßbar* $\forall \; n \in \mathbb{N}$*. Dann ist die Funtion* $f : X \to [0, \infty]$ *definiert durch* $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *meßbar und es gilt*

$$\int_X f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

Satz 1.21 (Lemma von Fatou). *Sei $f_n : X \to [0, \infty]$ meßbar $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int_X (\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n)\ d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n\ d\mu.$$

Gleichheit gilt i.A. nicht.

Satz 1.22 (Verbesserung von Lemma 1.18). *Sei $f : X \to [0, \infty]$ meßbar. Dann wird für $A \in \mathfrak{M}$ durch $\nu(A) = \int_A f\ d\mu$ ein Maß ν auf $\mathfrak{M}$ erklärt und es gilt*

$$(*) \qquad \int_X g\ d\nu = \int_X gf\ d\mu \quad \forall \text{ meßbaren Funktionen } g : X \to [0, \infty].$$

Schreibweise: $d\nu = f\, d\mu$.

Definition 1.23 (Integral für reell-/komplexwertige Funktionen.). *Sei*

$$\begin{aligned} L^1(X;\mu) &= \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar mit } \int_X |f|\ d\mu < \infty\} \\ &= \text{Menge der integrierbaren Funktionen.} \end{aligned}$$

Sei $f \in L^1(X;\mu)$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Für $A \in \mathfrak{M}$ definiere

$$\int_A f\ d\mu = \int_A u^+\ d\mu - \int_A u^-\ d\mu + i\left(\int_A v^+\ d\mu - \int_A v^-\ d\mu\right).$$

Bemerkung: Wegen Korollar 1.7, Korollar 1.10 sind u, v, u^+, u^-, v^+, v^- messbar. Wegen $u^+ \leq |u| \leq |f|$, $u^- \leq |u| \leq |f|$ etc. sind alle vier Integrale in der obigen Definition endlich, d.h. die Subtraktion ist möglich ($\infty - \infty$ wurde vermieden).

Satz 1.24 (Linearität des Integrals). *Seien $f, g \in L^1(X;\mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann ist $\alpha f + \beta g \in L^1(X;\mu)$ und es gilt*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int_X f\ d\mu + \beta \int_X g\ d\mu.$$

Satz 1.25 (Dreiecksungleichung.). *Für $f \in L^1(X;\mu)$ gilt*

$$\left| \int_X f\ d\mu \right| \leq \int_X |f|\ d\mu.$$

Satz 1.26 (Satz über dominierte Konvergenz.). *Sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ meßbar $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und es gelte $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall\, x \in X$. Falls eine Funktion $g \in L^1(X;\mu)$ existiert mit $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall\, x \in X$, dann ist $f \in L^1(X;\mu)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\ d\mu = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu = \int_X f\ d\mu.$$

1.7 Vollständige Maßräume

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt Nullmenge.
Falls $N' \subset N$ und $N' \in \mathfrak{M}$ so wäre auch $\mu(N') = 0$. Allerdings ist die Bedingung $N' \in \mathfrak{M}$ i.A. nicht garantiert.

Definition 1.27. *Ein Maßraum $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehört.*

Satz 1.28 (Vervollständigung eines Maßraums)**.** *Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Dann existiert eine σ-Algebra $\mathfrak{M}^* \supset \mathfrak{M}$ und ein Maß μ^* auf $\mathfrak{M}^*$ so dass gilt*

(a) $(X, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ ist vollständig

(b) $\forall\ A \in \mathfrak{M}$ gilt $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Fazit: Wir können o.B.d.A. stets annehmen, daß alle auftretenden Maßräume vollständig sind.

Definition 1.29 (Bedeutung der Nullmengen)**.** *Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $f, g, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ seien meßbare Funktionen und $A \in \mathfrak{M}$. Man sagt:*

(a) $f \geq g$ fast überall (f.ü.) auf A, falls eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ existiert mit $f(x) \geq g(x) \quad \forall\ x \in A \setminus N$.

(b) $f = g$ f.ü. auf A, falls eine Nullmenge $A \in \mathfrak{M}$ existiert mit $f(x) = g(x) \quad \forall\ x \in A \setminus N$.

(c) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. auf A, falls eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ existiert mit $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall\ x \in A \setminus N$.

Eigenschaften der "fast überall" Schreibweise:

(1) $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{C}$, f meßbar und $f = g$ f.ü. auf $X \Rightarrow g$ messbar.

(2) $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{C}$, $f \in L^1(X; \mu)$, $f = g$ f.ü. auf $X \Rightarrow g \in L^1(X; \mu)$ und $\int_X f\ d\mu = \int_X g\ d\mu$.

(3) Die Sätze 1.19, 1.26 gelten unter schwächeren Voraussetzungen.

Monotone Konvergenz: $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ f.ü. auf $X \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert f.ü. auf X und es gilt $\int_X f_n \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu$.

Dominierte Konvergenz: $|f_n(x)| \leq g(x)$ f.ü. auf X, $g \in L^1(X;\mu) \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu$.

Kapitel 2

Konstruktion des Lebesgueschen Maßes im $\mathbb{R}^n$

$J \subset \mathbb{R}$ heißt beschränktes Intervall, falls J die Form $(a,b),(a,b],[a,b)$ oder $[a,b]$ mit $a \leq b$, $a,b \in \mathbb{R}$ hat. Die Länge von J wird definiert durch $|J| := (b-a)$. Auch die leere Menge ist ein beschränktes Intervall mit $|\emptyset| = 0$.

Definition 2.1. *$I \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränktes Intervall, falls beschränkte Intervalle $J^1, \ldots, J^n \subset \mathbb{R}$ existieren mit $I = J^1 \times \ldots \times J^n$.*

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} |J^i| \text{ heißt } n\text{-dimensionaler Inhalt von } I.$$

Definition 2.2 (Äußeres Lebesguesches Maß.)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann heißt*

$$\lambda(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|,\ \text{mit } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränktes Intervall} \,\forall\, i \in \mathbb{N}\right\}$$

äußeres Lebesguesches Maß von A.

Achtung: $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ist kein Maß (vgl. Satz 2.4): es existieren paarweise disjunkte Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$.

Satz 2.3 (Eigenschaften des äußeren Maßes)**.**

(a) $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)$

(b) $\lambda\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ *(hier wird die paarweise Disjunktheit nicht gefordert)*

(c) $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, $I_i \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkte Intervalle mit* $\overset{\circ}{I_i} \cap \overset{\circ}{I_j}$ *für* $i \neq j \Rightarrow$ $\lambda(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i|$

(d) λ *ist invariant unter Verschiebungen.*

Satz 2.4. λ *ist kein Maß auf* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Im Beweis wird das **Auswahlaxiom** benutzt: Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von nichtleeren Mengen. Dann existiert eine Funktion F definiert auf $\mathcal{C}$ mit $F(Y) \in Y \;\; \forall\, Y \in \mathcal{C}$. Die Funktion F heißt Auswahlfunktion.

Definition 2.5 (Lebesguesche σ-Algebra)**.** *Eine Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *heißt Lebesgue-meßbar, falls gilt*

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \qquad \forall\; E \subset \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n, A$ *Lebesgue-meßbar*$\}$.

Bemerkung: (1) Die obige Definition geht auf Constantin Carathéodory 1873-1950 zurück.
(2) Beachte: es gilt immer $\lambda(E) \leq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c)$ nach Satz 2.3 (b).

Definition 2.6 (Borelsche σ-Algebra)**.**

$$\mathcal{B} \;\; = \;\; \bigcap \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \mathbb{R}^n, \text{ die alle offenen Mengen enthält}\}$$

$\mathcal{B}$ *heißt Borel'sche* σ*-Algebra. Sie ist die kleinste* σ*-Algebra auf* $\mathbb{R}^n$*, die alle offenen Mengen enthält.*

Bemerkung: Aus T 1.1 folgt, daß $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist.

Satz 2.7 (Hauptsatz zum Lebesgue-Maß)**.**

(1) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ *ist ein vollständiger Maßraum.*

(2) $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}$

(3) λ *ist ein Maß auf* $\mathcal{L}$*, welches invariant unter Bewegungen des* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

Definition 2.8. *Sei* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. *Dann heißt*

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < a_i + \delta : i = 1, \;\ldots, n\}$$

halboffener Würfel mit der Seitenlänge δ *und Ecke* a.

Lemma 2.9. *Sei* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $P_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$ *und*

$$\Omega_k = \textit{Menge aller halboffenen Würfel der Seitenlänge } 2^{-k} \textit{ mit Ecke in } P_k.$$

Ist $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ *offen und nichtleer, dann existieren höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte Würfel* $W_i \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Omega_k$ *mit* $\bigcup W_i = \mathcal{O}$.

Bemerkung: Ist $W \in \Omega_k$ und $W' \in \Omega_{k'}$ mit $k < k'$, dann folgt entweder $W \cap W' = \emptyset$ oder $W' \subset W$.

Abschließende Bemerkungen; G_δ-Mengen

Definition 2.10. *Eine Menge* $H \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* G_δ*-Menge, falls offene Mengen* $G_k \subset \mathbb{R}^n,\ k = 1, 2, \ldots,$ *existieren mit*

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Bemerkung: G_δ-Mengen sind Lebesgue-messbar.

Satz 2.11.

(a) *Für* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist* $\lambda(A) = \inf\{\lambda(G), G \supset A \textit{ offen }\}$.

(b) $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist Lebesgue-messbar* $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ *offene Menge* $G \supset A$ *mit* $\lambda(G \setminus A) < \varepsilon$.

(c) *Zu* $A \subset \mathbb{R}^n$ *existiert eine* G_δ*-Menge* $H \supset A$ *mit* $\lambda(H) = \lambda(A)$.

(d) $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist Lebesgue-messbar* $\Leftrightarrow \exists\ G_\delta$*-Menge* $H \supset A$ *mit* $\lambda(H \setminus A) = 0$.

Bemerkung: Die Aussagen (a), (c) gelten für beliebige Teilmengen A des $\mathbb{R}^n$.

Kapitel 3

Das Lebesguesche Integral im $\mathbb{R}^n$

Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ der Lebesguesche Maßraum. Für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sei die Funktion $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar sowie $f \in L^1(A)$, d.h. $\int_A |f| \; d\lambda < \infty$. Das Lebesguesches Integral bezeichnen wir mit $\int_A f \; d\lambda$. Weitere Notationen sind: $\int_A f \; dx$, $\int_A f(x) \; dx$, $\int_A f(x_1, \ldots, x_n) \; d(x_1, \ldots, x_n)$.

3.1 Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Wir schreiben zur besseren Unterscheidung der beiden Integrale $R\text{–}\int_a^b f \; dx$ für das Riemann-Integral.

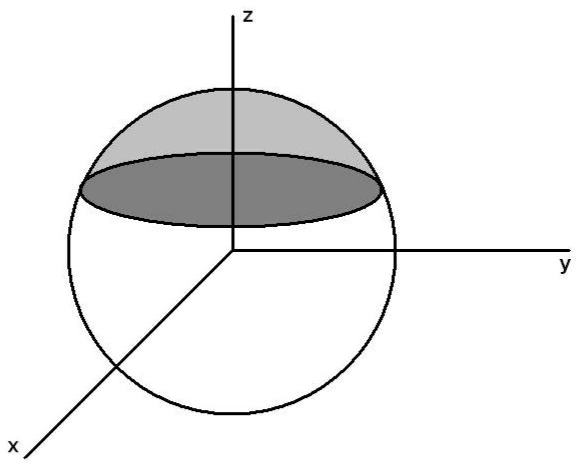
Satz 3.1. *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt $R\text{–}\int_a^b f \; dx = \int_a^b f \; d\lambda$.*

Bemerkung: $R\text{–}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \; dx = \lim\limits_{K\to\infty} R\text{–}\int_1^K \frac{\sin x}{x} \; dx$ existiert als uneigentliches Riemann-Integral, aber $R\text{–}\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \; dx$ existiert nicht, da

$$R\text{–}\int_1^K \left|\frac{\sin x}{x}\right| \; dx \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

d.h. $\frac{\sin x}{x} \notin L^1([1, \infty])$, d.h. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \; d\lambda$ existiert nicht im Lebesgueschen Sinn.

3.2 Prinzip von Cavalieri



Idee: Wir beschreiben zunächst ohne Beweis die Idee des *Prinzips von Cavalieri* am Beispiel des Kugelabschnitts

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R, z \geq h\},$$

wobei $h \in (0, R)$ fest gewählt wurde. Um das Volumen von M zu bestimmen geht man wie folgt vor:

(Cavalieri) $$\lambda^3(M) = \int_h^R \lambda^2(M_\varrho)\ d\varrho,$$

wobei $M_\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 - \varrho^2\}$ der 2-dimensionale Schnitt von M mit der Hyperebene $z = \varrho$ ist. Hierbei bezeichnet λ^n das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.

Das 2-dimesionalen Maß des Kreises M_ϱ mit Radius $\sqrt{R^2 - \rho^2}$ ist gegeben durch $\lambda^2(M_\varrho) = \pi(R^2 - \varrho^2)$ (Begründung folgt später). Folglich ist nach dem Cavalierischen Prinzip

$$\begin{aligned} \lambda^3(M) &= \int_h^R \pi(R^2 - \varrho^2)\ d\varrho \\ &= \pi\left(R^2(R-h) - \frac{R^3 - h^3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(3R^2 - Rh - h^2)(R-h). \end{aligned}$$

Nun entwickeln wir das Cavalierische Prinzip im Detail. Im folgenden sei stets $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^q,\ p + q = n.$

Definition 3.2. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^q$. Dann heißt*

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^p : \ z = (x, y) \in A\}$$

der Schnitt von A mit dem affinen Unterraum $\{(x, y) : \ x \in \mathbb{R}^p\}$.

Lemma 3.3.

(a) Sind $B \subset \mathbb{R}^p$, $C \subset \mathbb{R}^q$ offen (G_δ-Mengen) so ist $B \times C \subset \mathbb{R}^n$ offen (G_δ-Menge).

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ offen (G_δ-Menge) so ist jeder Schnitt $A_y \subset \mathbb{R}^p$ offen (G_δ-Menge).

Satz 3.4 (Prinzip von Cavalieri)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar. Dann ist für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ die Menge $A_y \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue-meßbar. Die fast überall auf $\mathbb{R}^q$ definierte Funktion $y \mapsto \lambda^p(A_y)$ ist Lebesgue-meßbar und es gilt*

$$(*) \qquad \lambda^n(A) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^p(A_y)\ dy.$$

3.3 Satz von Fubini

Satz 3.5 (Satz von Fubini für nichtnegative Funktionen)**.**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Lebesgue-meßbar. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ ist die Funktion

$$f(\cdot, y) : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \to \quad [0, \infty] \\ x & \mapsto \quad f(x, y) \end{cases}$$

Lebesgue-meßbar.

(b) Für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ ist $F(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\ dx$ definiert und die Funktion $F : \mathbb{R}^q \to [0, \infty]$ ist Lebesgue-meßbar.

(c) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\ dz = \int_{\mathbb{R}^q} F(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\ dx \right)\ dy.$$

Bemerkung: In (b) muß F auf ganz $\mathbb{R}^q$ z.B. durch $F(y) = 0$ fortgesetzt werden.

Satz 3.6 (Satz von Fubini, 2. Form)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und es gelte*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \; dz = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)| \; dx \right) \; dy < \infty.$$

Dann gelten die Aussagen $(a) - (c)$ von Satz 3.5, wobei "meßbar" durch "integrierbar" zu ersetzen ist.

Bemerkung: (1) Man beachte, daß die Gleichheit der beiden Integrale in der Voraussetzung von Satz 3.6 bereits aus Satz 3.5 folgt. Entscheidend ist hier die Bedingung der Endlichkeit der beiden Integrale.
(2) Ist $f \in L^1(A)$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_A f \; dz = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A \; dz &= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\chi_{A_y}(x) \; dx \right) \; dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{A_y} f(x,y) \; dx \right) \; dy. \end{aligned}$$

3.4 Die Substitutionsregel

Ziel: Formulierung von Bedingungen an $\phi : H \to G$, H offen und $f : G \to \mathbb{R}$ so dass gilt

$$\int_G f(x) \; dx = \int_H f(\phi(y)) |\det D\phi(y)| \; dy.$$

Dazun benötigen wir als Vorbereitung die nächsten vier Sätze:

Satz 3.7. *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und ist $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung mit $\det D\phi(x) \neq 0 \;\; \forall \; x \in G$ so bildet ϕ offene Mengen auf offene Mengen ab.*

Satz 3.8 (Lemma von Sard)**.** *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, dann gilt*

$$\lambda(\phi(A)) \leq \int_A |\det D\phi(x)| \; dx$$

für jede Menge $A \subset G$, $\;A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, wobei λ das äußere Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Der Beweis findet sich im Anhang zu diesem Kapitel.

Satz 3.9. *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Abbildung mit* $\det D\phi(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in G$, *dann gilt die Aussage: aus $A \subset G$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\phi(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Satz 3.10. *Ist $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrix, dann gilt*

$$\lambda(MA) = |\det M|\lambda(A) \;\; \forall\, A \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei λ das äußere Maß ist.

Beachte: Im allgemeinen gelten die Regeln

$$f(\bigcap A_i) \subset \bigcap f(A_i), \quad f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i).$$

Ist jedoch f injektiv, so gilt sogar:

$$f(\bigcap A_i) = \bigcap f(A_i), \quad f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i), \quad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Bemerkung: Für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ folgt die Aussage von Satz 3.10 mit "$\leq$" auch aus dem Lemma von Sard. Die Verbesserung zu "$=$" ist dann leicht zu zeigen.

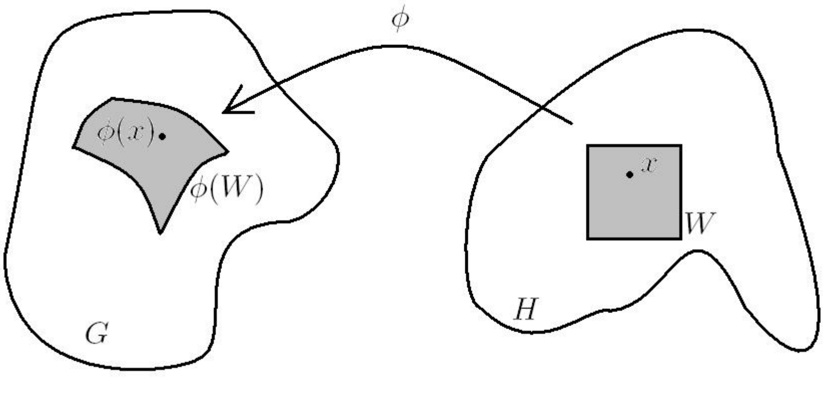
Satz 3.11 (Die Substitutionsregel)**.** *Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : H \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Abbildung mit* $\det D\phi \neq 0$ *in H sowie $G := \phi(H)$. Dann gilt:*

(a) $f : G \to [0,\infty]$ meßbar $\Leftrightarrow$ $F = (f \circ \phi)|\det D\phi| : H \to [0,\infty]$ meßbar. Ist dies der Fall, so gilt

$$\int_G f(x)\; dx = \int_H f(\phi(y))|\det D\phi(y)|\; dy.$$

(b) Für $f : G \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt die Aussage in (a), falls man "meßbar" durch "integrierbar" ersetzt.

Heuristische Beschreibung der Substitutionsregel im Fall $f \equiv 1$.
Warum gilt $\lambda(G) = \int_H |\det D\phi(y)|\; dy$?



Sei $W \subset H$ ein Würfel mit Mittelpunkt x. Aus der Taylor-Formel für ϕ ergibt sich für $y \in W$

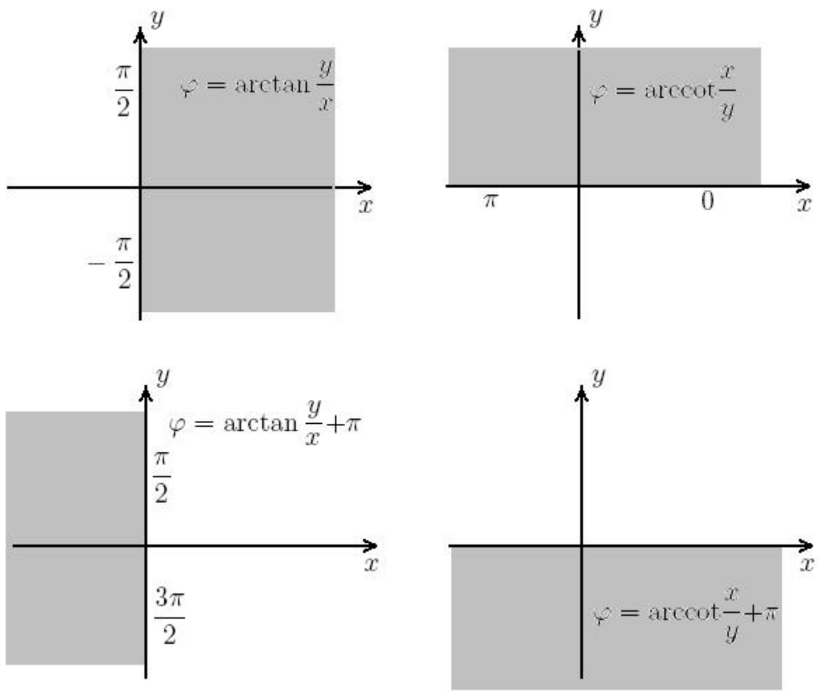
$$\phi(y) \approx \phi(x) + D\phi(x)(y - x).$$

Damit ist $\lambda(\phi(W)) \approx \lambda(D\phi(x)W) = |\det D\phi(x)|\lambda(W)$. Die Substitutionsregel folgt durch Aufsummieren über viele kleine Würfel.

3.5 Anwendungen der Substitutionsregel

(a) Ebene Polarkoordinaten

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann existieren $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \phi(r, \varphi)$. Man sieht leicht, daß $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gelten muß. Etwas schwieriger ist die Definition von φ:



Nachträglich muß die Definition von $\phi = \arctan\frac{y}{x}$ im ersten Bild auf den ersten Quadaranten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\}$ eingeschränkt werden. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} Q & \to & \mathbb{R}^2 \setminus P \\ (r, \varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{cases}$$

sowie die Mengen

$$Q = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

$$P = \{(x, 0) : \ x \geq 0\}.$$

Dann bildet ϕ die Menge Q bijektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus P$ ab. Für die Jacobimatrix von ϕ gilt

$$D\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \det D\phi(r, \varphi) = r > 0 \text{ auf } Q.$$

Als Beispiel sei $B_R(0) = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 < R^2\}$. Dann ist $\widetilde{B_R}(0) = B_R(0) \setminus P$ offen und mit $Q_R = \{(r, \varphi) : \ 0 < r < R, \ 0 < \varphi < 2\pi\}$ ist dann die Abbildung $\varphi : Q_R \to \widetilde{B_R}(0)$ bijektiv. Für Funktionen $f \in L^1(B_R(0))$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} f(x, y) \ d(x, y) &\overset{\lambda(P)=0}{=} \int_{\widetilde{B_R}(0)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \ d(r, \varphi) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi \right) dr \end{aligned}$$

Als Anwendung berechnen wir das Integral $A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (es ist keine explizite Stammfunktion von e^{-x^2} bekannt). Der Trick ist zuerst A^2 anstatt A zu berechnen:

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &\overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \ dr \ d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \ dr \\ &= 2\pi \left. \frac{e^{-r^2}}{-2} \right|_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Folglich ist $A = \sqrt{\pi}$.

(b) Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wir führen in der x, y-Ebene Polarkoordinaten ein, z bleibt unverändert:

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \phi(r, \varphi, z).$$

Dann ist die Abbildung

$$\phi_z : \begin{cases} Q' & \to & \mathbb{R}^3 \setminus P' \\ (r,\varphi,z) & \mapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \end{cases}$$

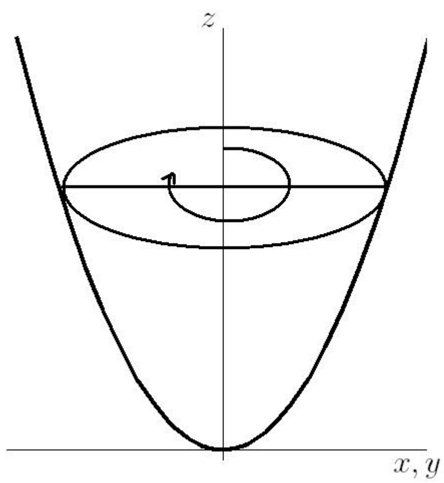
eine Bijektion, wobei

$$\begin{aligned} Q' &= \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : \ r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}, \\ P' &= \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\} = P \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für die Jacobimatrix folgt

$$D\phi_z(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det D\phi_z(r,\varphi,z) = r > 0 \text{ auf } Q'.$$

Als Beispiel betrachten wir das Paraboloid $B = \{x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 1\}$



und berechnen das Integral $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\ d(x,y,z)$. Mit den Mengen

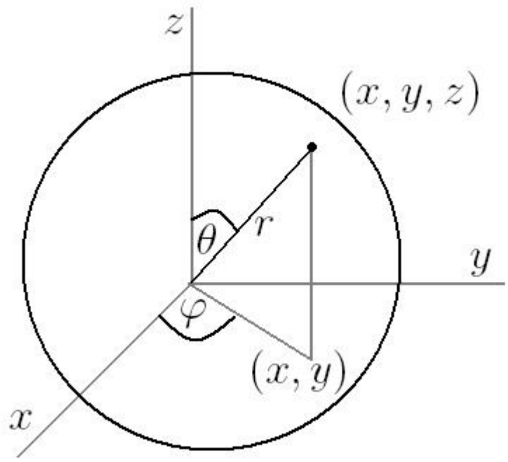
$$\begin{aligned} \widetilde{Q} &= \{(r,\varphi,z),\ 0 < r < \sqrt{z},\ 0 < z < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi\} \\ \widetilde{B} &= \underbrace{\{(x,y,z) :\ 0 \leq x^2 + y^2 < z,\ 0 < z < 1\}}_{\text{offen}} \setminus P' \end{aligned}$$

ist $\phi_z : \widetilde{Q} \to \widetilde{B}$ bijektiv. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_B \sqrt{x^2+y^2}\ d(x,y,z) &= \int_{\widetilde{B}} \sqrt{x^2+y^2}\ d(x,y,z) = \int_{\widetilde{Q}} r^2\ d(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}} r^2\ dr\ dz\ d\varphi = 2\pi \int_0^1 \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{\sqrt{z}}\ dz \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 z^{3/2}\ dz = \frac{4}{15}\pi \end{aligned}$$

(c) Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) =: \phi_3(r,\varphi,\theta)$, mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0,2\pi)$, $\theta \in [0,\pi]$.



Die Abbildung

$$\phi_3 : \begin{cases} Q & \to & \mathbb{R}^3 \setminus P \\ (r,\varphi,\theta) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \end{cases}$$

ist eine Bijektion, wobei

$$\begin{aligned} Q &= \{(r,\varphi,\theta) :\ r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\} \\ P &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y = 0\}. \end{aligned}$$

$$D\phi_3(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Für die Jacobideterminante gilt

$$\det D\phi_3(r,\varphi,\theta) = \cos\theta \cdot (-r^2\sin\theta\cos\theta) - r\sin\theta \cdot r\sin^2\theta = -r^2\sin\theta$$

$\neq 0$ auf Q. Als Beispiel betrachten wir die Kugelschale:

$$\begin{aligned} K &= \{(x,y,z) :\ \varrho^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2)\} \\ \widetilde{K} &= \{(x,y,z) :\ \varrho^2 < x^2+y^2+z^2 < R^2)\} \setminus P \text{ offen} \\ \widetilde{Q} &= \{(r,\varphi,\theta) :\ \varrho < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_K f\ d(x,y,z) = \int_{\widetilde{K}} f\ d(x,y,z) = \int_\varrho^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f \circ \phi_3) r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi\ dr$$

Beachte: Die Abbildung ϕ_3 läßt sich auch wie folgt darstellen: wir wählen zunächst Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z) = \phi_z(\varrho, \phi, z) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z).$$

In der (z,ϱ)-Ebene führen wir nun Polarkoordinaten (r,θ) ein

$$(z,\varrho) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ (da } \varrho \geq 0).$$

Damit ist $(\varrho,\varphi,z) = (r\sin\theta, \varphi, r\cos\theta) = \psi(r,\varphi,\theta)$. Das bedeutet $\phi_3 = \phi_z \circ \psi$.

(d) n-dim Polarkoordinaten $(n \geq 3)$

Sei $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \\
x_2 &= r\sin\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \\
x_3 &= r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \\
x_4 &= r\cos\theta_2 \sin\theta_3 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\cos\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \\
x_n &= r\cos\theta_{n-2}
\end{aligned}$$

mit $r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta_i \leq \pi$ für $i = 1, \ldots, n-2$. Dann ist $x = \phi_n(r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2})$, wobei die Abbildung ϕ_n wie folgt definiert ist:

$$\phi_n : \begin{cases} Q & \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \setminus P \\ (r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) & \mapsto \quad \phi_n(r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned}
Q &= \{(r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) :\ r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta_i < \pi,\ i = 1,\ldots,n-2\} \\
P &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_1 \geq 0,\ x_2 = 0\}
\end{aligned}$$

Darstellung: $x = \phi_z(\underbrace{\varrho,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-3}}_{\text{Polarkoordinaten in } \mathbb{R}^{n-1}}, x_n) := (\phi_{n-1}(\varrho,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-3}), x_n)$.

Führe in der (x_n,ϱ)-Ebene 2-dimensionale Polarkoordinaten ein

$$\begin{aligned}
\varrho &= r\sin\theta_{n-2} \\
x_n &= r\cos\theta_{n-2}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(\varrho, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}, x_n) =& (r \sin \theta_{n-2}, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}, r \cos \theta_{n-2}) \\
=& : \psi(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})
\end{aligned}
$$

und wir erhalten $\phi_n = \phi_z \circ \psi$. Nun bestimmen wir die Jacobideterminante von ϕ_n.

Behauptung: $|\det D\phi_n| = r^{n-1} \sin \theta_1 (\sin \theta_2)^2 \cdot \ldots \cdot (\sin \theta_{n-2})^{n-2}$

Induktion:

$$
\begin{aligned}
|\det D\phi_z| &= \varrho^{n-2} \sin \theta_1 (\sin \theta_2)^2 \cdots (\sin \theta_{n-3})^{n-3} \text{ (Induktions-Voraussetzung)} \\
|\det D\psi| &= r, \quad \varrho = r \sin \theta_{n-2}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten $|\det D\phi_n| = r^{n-1} \sin \theta_1 (\sin \theta_2)^2 \cdots (\sin \theta_{n-3})^{n-3} (\sin \theta_{n-2})^{n-2}$.

Nun können wir das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel berechnen:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B_1(0)} 1 \; dx \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \cdots \int\limits_0^{\pi} r^{n-1} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots (\sin \theta_{n-3})^{n-3} (\sin \theta_{n-2})^{n-2} \; d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi dr \\
&= \frac{1}{n} \underbrace{2\pi \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \sin \theta_1 (\sin \theta_2)^2 \cdots (\sin \theta_{n-3})^{n-3} (\sin \theta_{n-2})^{n-2} \; d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}}_{=:\omega_n}
\end{aligned}
$$

Es gilt $\omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi,\ \omega_4 = 2\pi^2,\ \omega_5 = \frac{8}{3}\pi^2$. Im Allgemeinen erhalten wir für ω_n die folgende Darstellung.

Satz 3.12 (Bestimmung von ω_n)**.**

$$
\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})},
$$

wobei $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}$ $(x > 0)$ *die Eulersche Gammafunktion ist.*

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 3.12 benötigen wir die beiden folgenden Resultate:

Lemma 3.13.

(a) *Für* $x > 0$ *gilt* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(b) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$

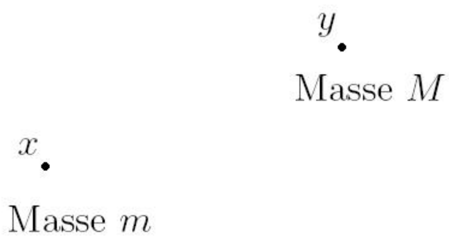
(c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\pi}$

Lemma 3.14. *Sei* $m \in \mathbb{N}_0$ *bzw.* $m \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1}\theta\ d\theta = \frac{2m \ \cdot \ (2m-2) \ \cdot \ \ldots \ \cdot 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 2$$

$$\int_0^\pi \sin^{2m}\theta\ d\theta = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2m \ \cdot \ (2m-2) \ \cdot \ \ldots \ \cdot 4 \cdot 2} \cdot \pi$$

Beispiel: Wir berechnen das Gravitationspotential einer homogenen Kugel. Gegeben seine zuerst zwei Massen: eine Masse m im Punkt x und eine Masse M im Punkt y. Beiden Massen ziehen sich an.



Die Anziehungskraft, die die Masse M aus m ausübt ist gegeben durch das Newtonsche-Gravitationsgesetz:

$$F = \gamma m M \frac{y-x}{|y-x|^3} = \frac{\gamma m M}{|y-x|^2}\frac{y-x}{|y-x|} = m\gamma M \nabla_x \frac{1}{|y-x|}.$$

Die skalare Funktion $\gamma M \frac{1}{|y-x|}$ heißt Gravitationspotential des punktförmigen Körpers der Masse M im Punkt y. Etwas allgemeiner gilt für das Gravitationspotential eines ausgedehnten Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Massendichte ϱ:

$$Z(x) := \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\varrho(x)}{|x-y|}\ dy.$$

Dabei ist der Faktor $\frac{1}{4\pi}$ eine (mathematische, keine physikalische) Normierung.

Beispiel: $\Omega = B_R(0)$, $\varrho(y) = \varrho$ =const.

$$Z(x) = \frac{\varrho}{4\pi}\underbrace{\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-y|}\ dy}_{U(x)}.$$

Es gilt $U(x) = U(Ax)$, $A \in \mathcal{O}(n)$. Zum Nachweis betrachte man

$$U(Ax) = \int_{B_R(0)} \frac{1}{|Ax-y|}\,dy \overset{y=Az}{=} \int_{B_R(0)} \frac{1}{|Ax-Az|}|\det A|\,dz = U(x).$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie von $U(x)$ genügt es, $U(x)$ für die speziellen Punkte $x = (0,0,x_3)$, $x_3 > 0$ zu berechnen. Dazu führen wir Kugelkoordinaten ein:

$$(y_1, y_2, y_3) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}
U(0,0,x_3) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2+x_3^2-2x_3r\cos\theta}}\,d\theta\,d\phi\,dr \\
&= 2\pi\int_0^R \frac{r}{x_3}\sqrt{r^2+x_3^2-2x_3r\cos\theta}\Big|_0^\pi\,dr \\
&= \frac{2\pi}{x_3}\int_0^R r(\sqrt{r^2+x^2+2rx_3}-\sqrt{r^2+x^2-2rx_3})\,dr \\
&= \frac{2\pi}{x_3}\int_0^R r(r+x_3-|r-x_3|)\,dr.
\end{aligned}$$

1.Fall: $x_3 \geq R$. Dann ist $U(0,0,x_3) = \frac{2\pi}{x_3}\int_0^R 2r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{x_3}$

2.Fall: $0 < R < x_3$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
U(0,0,x_3) &= \frac{2\pi}{x_3}\left(\int_0^{x_3} 2r^2\,dr + \int_{x_3}^R 2rx_3\,dr\right) \\
&= \frac{2\pi}{x_3}\left(\frac{2x_3^3}{3} + x_3(R^2-x_3^2)\right) \\
&= 2\pi\left(R^2 - \frac{1}{3}x_3^2\right)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Rotationsinvarianz von U und damit von Z erhalten wir das **Ergebnis:**

$$Z(x) = \begin{cases} \varrho\frac{R^3}{3|x|}, & |x| \geq R \\ \varrho\left(\frac{R^2}{2}-\frac{1}{6}|x|^2\right), & |x| < R. \end{cases}$$

Außerhalb der Kugel stimmt $Z(x)$ überein mit dem Potential einer Punktmasse in 0 mit $M = \frac{4}{3}\pi R^3\varrho$.

Newton erhielt dieses Ergebnis ca. 1680. Als Konsequenz konnte er große Himmelskörper als Punktmassen auffassen. Er konnte damit aus seinem Gravitationsgesetz heraus beweisen, daß die Bahnen der Planeten um die Sonne die Form von Ellipsen haben (diesen Schluß hatte bereits Kepler aufgrund zahlreichen Beobachtungen gezogen).

Anhang (Lemma von Sard)

Folgende Konstruktionen sind als Hilfsmittel für das Lemma von Sard erforderlich:

(i) Zu $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ sei die ε-Umgebung A_ε von A erklärt als

$$A_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\},$$

wobei $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{|x - a|, \ a \in A\}$.

(ii) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = \overline{A}$.

(iii) Gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$ stets $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(A_\varepsilon) = \lambda(A)$? Die Antwort ist nein, wie folgendes Beispiel zeigt: $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \ \lambda(\mathbb{Q}) = 0, \ \lambda(\mathbb{Q}_\varepsilon) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$. Aber: ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen so gilt tatsächlich:

$$\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{\varepsilon_k}, \ \varepsilon_k \searrow 0.$$

Da nämlich $\lambda(A_{\varepsilon_1}) < \infty$ folgt $\lambda(A) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_{\varepsilon_k})$, woraus sich die Behauptung ergibt.

(iv) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, nichtleerer Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, und $\mathrm{diam} A_k \to 0$ für $k \to \infty$ (dabei ist $\mathrm{diam} A_k$ der Durchmesser von A_k definiert durch $\mathrm{diam} A_k = \sup\{|x-y|, \ x, y \in A_k\}$) so gilt: es existiert genau ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \{\xi\}$.

(v) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Mengen wie in (iv) und $f : A_1 \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\frac{1}{\lambda(A_k)} \int_{A_k} f(x) \ dx \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\xi).$$

Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta > 0 : \ |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ falls $|x - \xi| < \delta$. Für $k \geq k_0$: $|x - \xi| < \delta \ \ \forall\, x \in A_k$, d.h.

$$\frac{1}{\lambda(A_k)} \left| \int_{A_k} \Big(f(x) - f(\xi) \Big) \, dx \right| \leq \frac{1}{\lambda(A_k)} \int_{A_k} |f(x) - f(\xi)| \ dx < \varepsilon.$$

Lemma 1. *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Würfel und $f \in C^1(W; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\lambda(f(W)) \leq \int_W |\det Df(x)| \, dx,$$

wobei λ das äußere Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Die gleiche Aussage gilt, wenn W ein beliebiger (offener, halboffener) Würfel ist.

Bemerkung: Es sei erwähnt, wie die Aussage für offene Würfel aus der für abgeschlossene folgt (für halboffene gilt eine ähnliche Argumentationskette). Ist W ein offener Würfel, so gibt es abgeschlossene Würfel $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W$ mit $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda(f(W)) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(f(W_k)) \leq \lim_{k\to\infty} \int_{W_k} |\det Df(x)|\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_W \chi_{W_k}(x) |\det Df(x)|\, dx = \int_W |\det Df(x)|\, dx,\end{aligned}$$

wobei zuletzt der Satz über monotone Konvergenz benutzt wurde.
Aus diesem Lemma folgt

Satz 2 (Sardsches Lemma). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(G;\mathbb{R}^n)$. Ist $A \subset G$ Lebesgue-meßbar, dann gilt*

$$(*) \qquad \lambda(f(A)) \leq \int_A |\det Df(x)|\, dx,$$

wobei λ das äußere Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Beweis: 1. Sei $A \subset G$ offen. Nach Lemma 2.9 existieren höchstens abzählbar viele, halboffene, paarweise disjunkte Würfel W_k mit $A = \bigcup_k W_k$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda(f(A)) &\leq \sum_k \lambda(f(W_k)) \leq \sum_k \int_{W_k} |\det Df(x)|\, dx \\ &= \sum_k \int_A \chi_{W_k}(x) |\det Df(x)|\, dx = \int_A |\det Df(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist (im Fall unendlicher Summe) Summation und Integration aufgrund des Satzes über monotone Konvergenz vertauschbar.

2. Sei $H \subset G$ eine beschränkte G_δ-Menge mit $\overline{H} \subset G$. Da $\overline{H}$ kompakt ist, ist $|\det Df(x)|$ eine beschänkte, stetige Funktion auf H. Als G_δ-Menge ist H darstellbar als $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ mit offenen, beschränkten Mengen $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ und $G \supset \overline{G_1} \supset \overline{H}$. Damit folgt wegen $f(H) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(G_k)$ und der Beschränktheit von $f(G_1)$

$$\begin{aligned}\lambda(f(H)) \leq \lim_{k\to\infty} \lambda(f(G_k)) &\leq \lim_{k\to\infty} \int_{G_k} |\det Df(x)|\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{G_1} \chi_{G_k}(x) |\det Df(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Im letzten Integral ist der Integrand beschränkt und damit $|\det Df(x)|$ eine obere Schranke in $L^1(G_1)$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\lambda(f(H)) &\leq \int_{G_1} \lim_{k\to\infty} \chi_{G_k}(x)|\det Df(x)|\,dx \\ &= \int_{G_1} \chi_H(x)|\det Df(x)|\,dx = \int_H |\det Df(x)|\,dx.\end{aligned}$$

3. Sei $H \subset G$ eine beschränkte G_δ-Menge. Dann ist $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H \cap B_k$ mit

$$B_k = \{x \in G : \frac{1}{k+1} \leq \operatorname{dist}(x, \partial G) < \frac{1}{k}\} \text{ für } k \geq 2, \tag{3.1}$$

$$B_1 = \{x \in G : 1 \leq \operatorname{dist}(x, \partial G)\}. \tag{3.2}$$

Man beachte, daß die Mengen B_k selbst G_δ-Mengen sind. Auf der Menge $H_k := H \cap B_k$ gilt nach 2. die Abschätzung $(*)$. Da H_k paarweise disjunkt sind folgt wie unter 1.

$$\lambda(f(H)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f(H_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{H_k} |\det Df(x)|\,dx = \int_H |\det Df(x)|\,dx.$$

4. Sei $H \subset G$ eine beliebige G_δ-Menge. Dann ist $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H \cap A_k$ mit G_δ-Mengen $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : (k-1) \leq |x| < k\}$. Für die beschränkte G_δ-Menge $H \cap A_k$ gilt $(*)$ wegen 3. Mit ähnlicher Argumentation wie unter 3. folgt $(*)$ für H.

5. Sei $A \subset G$ eine meßbare Menge. Dann existiert nach Satz 2.11 eine G_δ-Menge H mit $G \supset H \supset A$ und $\lambda(H \setminus A) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda(f(A)) \leq \lambda(f(H)) &\leq \int_H |\det Df(x)|\,dx \\ &= \int_A |\det Df(x)|\,dx + \underbrace{\int_{H\setminus A} |\det Df(x)|\,dx}_{=0},\end{aligned}$$

da $H \setminus A$ Maß Null hat. Damit ist $(*)$ für alle meßbaren Teilmengen von G vollständig bewiesen. $\square$

Folgerung: Es sei $K = \{x \in G : \det Df(x) = 0\}$ die Menge der kritischen Punkte der Funktion f in der Menge G. Dann gilt für die Menge $f(K)$ der kritischen Werte von f die Beziehung $\lambda(f(K)) = 0$.

Allgemeiner Satz von Morse-Sard: *Sei* $G \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : G \to \mathbb{R}^m$ *eine* C^k*-Abbildung. Ist* $K = \{x \in G : \operatorname{rang} Df(x) < m\}$ *wiederum die Menge der kritischen Punkte von* f *und* $k \geq \max\{n-m+1, 1\}$ *so gilt* $\lambda^m(f(K)) = 0$.

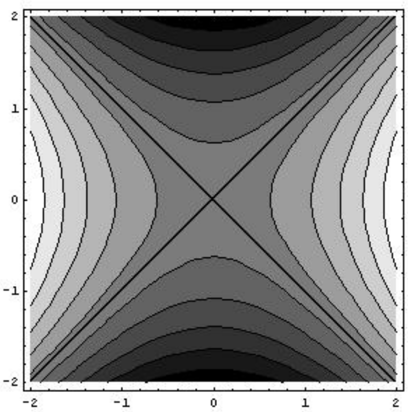
Beispiel: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion. Nun ist die Menge der kritischen Punkte von f gegeben durch $K = \{x \in G : \nabla f(x) = 0\}$ und es gilt $\lambda(f(K)) = 0$. Bezeichnen wir mit $N_c := \{x \in G : f(x) = c\}$ die Niveaumenge von f zum Niveau c, so gilt die Aussage: für fast alle Niveaus $c \in f(G)$ gilt: $\nabla f(x) \neq 0 \;\forall\; x \in N_c$.

Folgerung: Mit dem Satz über implizit definierte Funktionen ergibt sich eine wichtige Folgerung. Für fast alle Niveaus $c \in f(G)$ gilt: ist x ein Punkt der Niveaumenge N_c so kann man lokal um x die Niveaumenge als Funktionsgraphen dartstellen, d.h. in einer Umgebung von x gilt:

$$f(x) = c \Leftrightarrow x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

falls z.B. $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \neq 0$.

Man betrachte als Beispiel die Niveaumengen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Lediglich die Nullniveaumenge läßt sich in der Nähe des Punktes $(0, 0)$ nicht als Funktionsgraph beschreiben. Für alle anderen Niveaumengen ist dies lokal immer möglich.



Niveaulinien von $f(x, y) = x^2 - y^2$

Kapitel 4

Integralsätze von Gauß, Stokes

4.1 Gaußscher Integralsatz in der Ebene

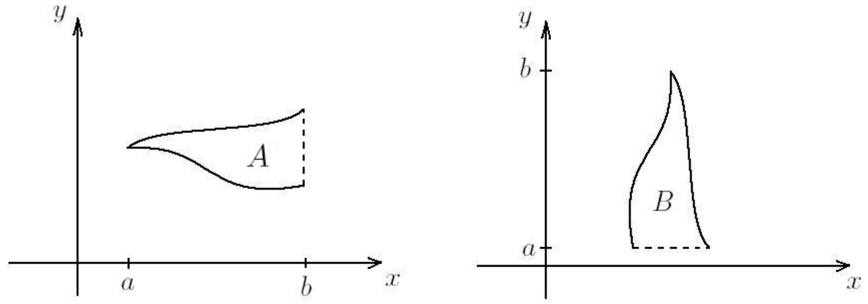
Definition 4.1. *Es sei $I = [a, b]$ und $h_1, h_2 \in C(I)$ mit $h_1(x) < h_2(x) \;\; \forall\, x \in (a, b)$. Dann heißt*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; a \leq x \leq b, \;\; h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

abgeschlossenes Normalgebiet bzgl. der y-Achse und

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; a \leq y \leq b, \;\; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

heißt abgeschlossenes Normalgebiet bzgl. der x-Achse [vgl. Analysis II, Definition 9.1].



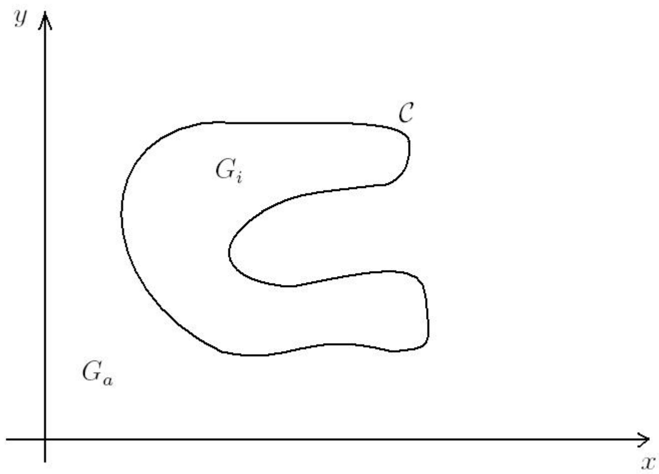
Definition 4.2. *Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ eine stückweise glatte Jordankurve mit Parametrisierung $\psi : [a, b] \to \mathcal{C}$ auf Bogenlänge mit $\psi(t) = (\xi(t), \eta(t))$. Dann heißt*

$$\tau_{\pm} = \pm(\xi'(t), \eta'(t)) \;\; \textit{Tangente an } \mathcal{C} \textit{ im Punkt } \psi(t)$$

$$\textit{und } \nu_{\pm} = \pm(\eta'(t), -\xi'(t)) \;\; \textit{Normale an } \mathcal{C} \textit{ im Punkt } \psi(t).$$

Beide Vektoren haben die Länge 1, da ψ aus Bogenlänge parametrisiert ist..

Bemerkung Eine Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ heißt stückweise glatte Jordankurve, falls eine stetige Parametrisierung $\psi : [a, b] \to \mathcal{C}$ existiert, die auf $[a, b)$ injektiv ist und es Punkte $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < b = t_{p+1}$ gibt, so daß $\psi|_{[t_{i-1},t_i]} \in C^1([t_{i-1}, t_i])$, $i = 1, \ldots, p+1$, $\psi' \neq 0$ auf $[t_{i-1}, t_i]$.
Jordanscher Kurvensatz: Zu jeder ebenen geschlossenen Jordankurve $\mathcal{C}$ gehören zwei Gebiete: ein beschränktes Innengebiet G_i und ein unbeschränktes Außengebiet G_a mit $\mathcal{C} = \partial G_i = \partial G_a$, $\mathbb{R}^2 = \mathcal{C} \cup G_i \cup G_a$, wobei die drei Punktmengen disjunkt sind.



Erinnerung: Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann heißen x, y äquivalent ($x \sim y$), falls ein ganz in G verlaufender Streckenzug von x nach y führt. Die Äquivalenzklassen heißen "Zusammenhangskomponenten". G heißt zusammenhängend (Gebiet), falls G nur eine Zusammenhangskomponente besitzt.

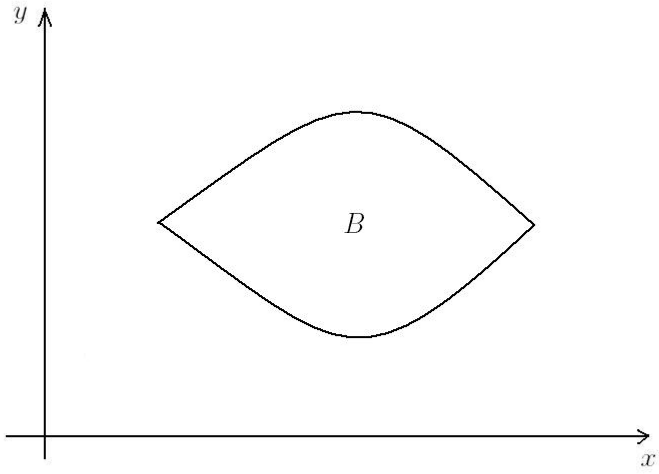
Definition 4.3. *Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ eine ebene, geschlossene stückweise glatte Jordankurve. Ein Normalenvektor ν im Punkt $p \in \mathcal{C}$ heißt äußere Normale, falls ein $t_0 > 0$ existiert mit $p + t\nu \in G_a$ für $t \in (0, t_0)$.*

Satz 4.4 (Gaußscher Integralsatz in der Ebene)**.** *Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Normalgebiet bzgl. der x- und y-Achse mit stückweise glatter Randkurve. Ist $f : B \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, dann gilt*

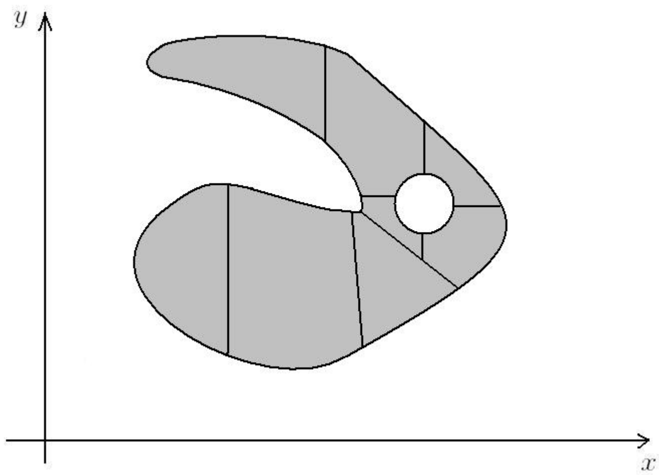
$$\int_B \operatorname{div} f \; d(x, y) = {}^{\partial B}\!\!\int f \cdot \nu \; ds,$$

wobei $\nu(p)$ die äußere Normale an ∂B im Punkt $p \in \partial B$ ist.

Bemerkung: Die Voraussetzungen an B in Satz 4.4 sind z.B. erfüllt, falls B eine konvexe Menge mit stückweise glatter Randkurve ist (z.B. Dreiecke, Rechtecke, Kreise).



Allgemeine Bereiche: Satz 4.4 gilt auch dann, wenn sich B durch endlich viele glatte Jordankurven $\mathcal{C}_k,\ k = 1, \dots, p$ in endlich viele Teilbereiche zerlegen läßt, die den Voraussetzungen von Satz 4.4 genügen. Z.B.:



Beim Zusammensetzen der Kurvenintegrale wird entlang derselben Kurve einmal mit $f \cdot \nu$ und einmal $-f \cdot \nu$ integriert, d.h. die Kurvenintegrale über $\mathcal{C}_k$ fallen heraus.

Bemerkung zu Satz 4.4: Ist $\phi : [a, b] \to \partial B$ eine stückweise C^1-Parametrisierung von ∂B mit $\phi(t) = (\xi(t), \eta(t))$, so dass gilt:

$$(*) \qquad \underbrace{\nu(\phi(t))}_{\text{äußere Normale}} = \frac{(\eta'(t), -\xi'(t))}{\sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)}}$$

dann heißt ϕ positiv orientiert . In diesem Fall gilt $(f = (f_1, f_2))$

$$\int_B \operatorname{div} f \, d(x,y) = \underbrace{{}^{\partial B}\!\!\int f \cdot \nu \, ds}_{\text{Kurvenintegral}} = \underbrace{{}^{\phi}\!\!\int (f_1 \, dy - f_2 \, dx)}_{\text{Wegintegral}}.$$

Man beachte, daß bei stückweiser C^1-Parametrisierung die Beziehung $(*)$ nur mit Ausnahme von endliche vielen t-Werten gilt.

Berechnung von Flächeninhalten: Setze in Satz 4.4 $f(x,y) = (x,0)$ bzw. $f(x,y) = (0,y)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= {}^{\partial B}\!\!\oint x\nu_1 \, ds = {}^{\partial B}\!\!\oint y\nu_2 \, ds \\ &= \frac{1}{2}\, {}^{\partial B}\!\!\oint (x\nu_1 + y\nu_2) \, ds = \frac{1}{2}\, {}^{\phi}\!\!\int x \, dy - y \, dx, \end{aligned}$$

falls $\phi = (\xi, \eta) : [a,b] \to \partial B$ eine stückweise glatte, positive orientierte Parametrisierung von ∂B ist. Ist z.B. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ eine Ellipse und wird ∂B parametrisiert durch $\phi(t) = (a\cos t, b\sin t)$, so gilt

$$x \, dy - y \, dx = a(\cos t) \cdot b(\cos t) \, dt - b(\sin t) \cdot a(-\sin t) \, dt = ab \, dt,$$

d.h. $|B| = ab\pi$.

4.2 Flächen im $\mathbb{R}^3$; Vektorprodukt

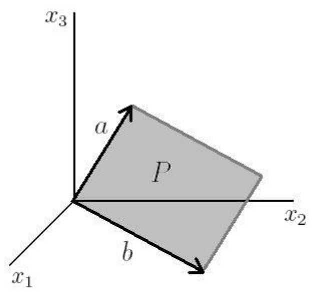
(1) Wie beschreibt man Flächen im $\mathbb{R}^3$?

(2) Wie kann man den Inhalt von Flächen im $\mathbb{R}^3$ messen?

Beispiel: Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ spannen ein Parallelogramm

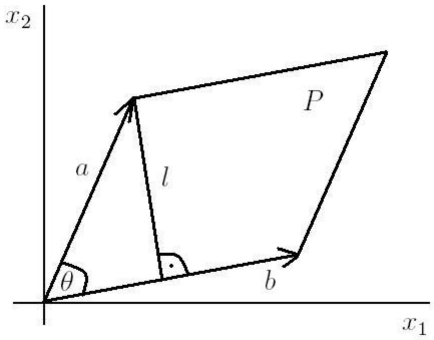
$$P(a,b) = \{\lambda a + \mu b : 0 \leq \lambda \leq 1, \; 0 \leq \mu \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

auf. Welchen Flächeninhalt $|P|$ hat die Menge P?



Vorläufige Antwort, falls P in der x_1, x_2-Ebene liegt:

$$|P| = |b|\, l = (b \cdot a) \sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$



Konvention: Ist $B = B' \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ komplett in der x, y-Ebene enthalten, dann sei $|B| = \lambda^2(B')$, falls $B' \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-messbar ist.
Falls $C = MB + C_0$, $M \in \mathcal{O}(n)$ eine orthogonale Matrix, $C_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Verschiebungsvektor, dann gelte $|C| := |B|$.

Definition 4.5. *Seien* $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. *Dann heißt*

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt) der Vektoren a, b.

Lemma 4.6 (Eigenschaften des Vektorprodukts)**.** *Seien* $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

(a) $(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(a, b, c),$
wobei hier a, b, c *als Spaltenvektoren ausgefasst werden.*

(b) Für orthogonale Matrizen $S \in \mathcal{O}(n)$ *gilt* $Sa \times Sb = (\det S) S (a \times b)$. *Insbesondere gilt* $|Sa \times Sb| = |a \times b|$.

(c) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$

Korollar 4.7 (Flächeninhalt von Parallelogrammen)**.** $|P(a, b)| = |a \times b|$.

Definition 4.8 (Flächen)**.** *Sei* $G \subset \mathbb{R}^2$ *offen. Die Abbildung* $\phi : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ *besitze folgende Eigenschaften:*

(i) ϕ *sei injektiv, stetig differenzierbar in* G,

(ii) ϕ *sei Lipschitzstetig auf* $\overline{G}$,

(iii) $Rang D\phi = 2$ *in* G,

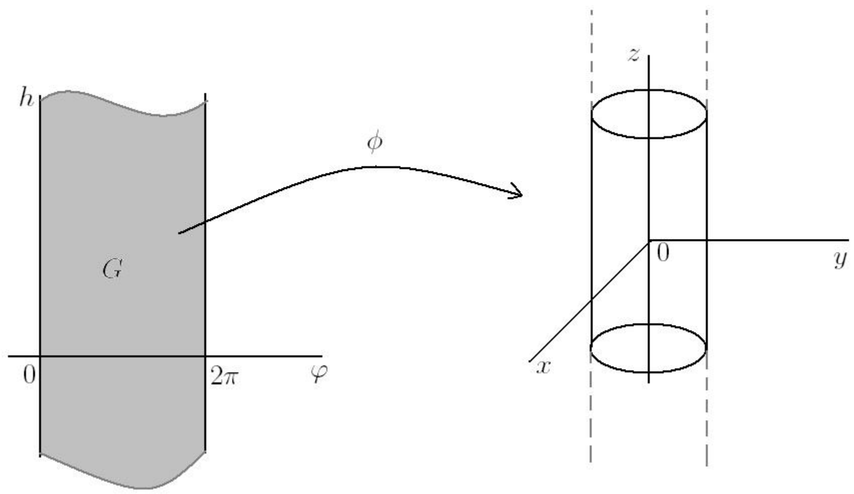
(iv) $\phi(G)$, $\phi(\partial G)$ *seien disjunkt.*

Dann heißt $F = \phi(G)$ *offene Fläche und* ϕ *eine Parameterdarstellung (Parametrisierung) von* F. $\phi(\overline{G})$ *heißt abgeschlossene Fläche,* $\phi(\partial G)$ *heißt Rand der Fläche,* $\phi(G)$ *heißt Inneres der Fläche.*

Beispiel: Zylinderfläche
$G := (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$\phi : \begin{cases} \overline{G} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, h) & \mapsto & (\cos\varphi, \sin\varphi, h) \end{cases} \qquad D\phi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang 2}$$

Alle Eigenschaften von Definition 4.8 sind erfüllt.
$\phi(\overline{G}) = Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,
$\phi(G) = Z \setminus \{(1, 0, h) : \ h \in \mathbb{R}\}$,
$\phi(\partial G) = \{(1, 0, h) : \ h \in \mathbb{R}\}$



Definition 4.9. *Sei* $F = \phi(G)$ *Fläche mit Parametrisierung* $\phi = \phi(u, v)$ *für* $(u, v) \in G$. *Im Flächenpunkt* $x_0 = \phi(u_0, v_0)$ *heißt die affine Ebene*

$$x_0 + \left[\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0)\right]$$

Tangentialebene, die Vektoren des Unterversektorraumes

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0)\right] \subset \mathbb{R}^3$$

heißen Tangentialvektoren und

$$\nu = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\phi}{\partial v}(u_0, v_0)\right|}$$

heißt Normaleneinheitsvektor. Die für $(u, v) \in G$ *gebildete Matrix*

$$(g_{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial\phi}{\partial u}\right|^2 & \frac{\partial\phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial v} & \left|\frac{\partial\phi}{\partial v}\right|^2 \end{pmatrix}$$

heißt metrischer Tensor.

Bemerkung:

(i) ν steht senkrecht auf der Tangentialebene, denn $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$.

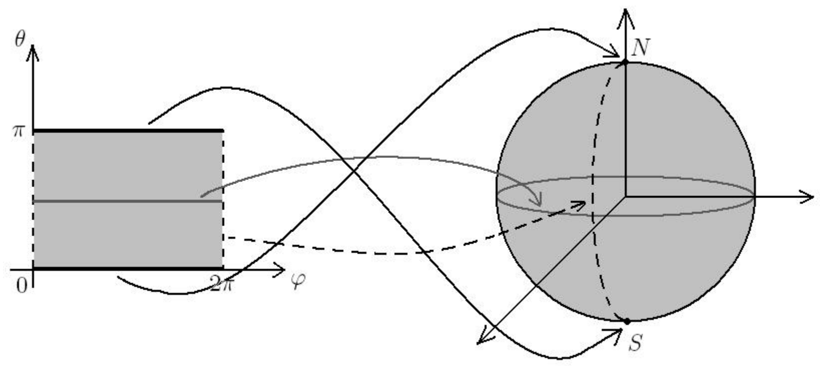
(ii) $\left|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\right| = \sqrt{\det(g_{ij})}$

Beispiel: Kugeloberfläche $\partial B_\varrho(0)$

$G = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \varphi < 2\pi, \ 0 < \theta < \pi\}$

$$\phi : \begin{cases} \overline{G} & \to \quad \partial B_\varrho(0) \\ (\varphi, \theta) & \mapsto \quad (\varrho\cos\varphi\sin\theta, \varrho\sin\varphi\sin\theta, \varrho\cos\theta) \end{cases}$$

$\phi : G \to \partial B_\varrho(0) \backslash$Halbkreis über Nord,Südpol



$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = (-\varrho\sin\varphi\sin\theta, \varrho\cos\varphi\sin\theta, 0)$, $\quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = (\varrho\cos\varphi\cos\theta, \varrho\sin\varphi\cos\theta, -\varrho\sin\theta)$

$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \varrho^2(-\cos\varphi\sin^2\theta, -\sin\varphi\sin^2\theta, -\sin\theta\cos\theta)$,

$|\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\phi}{\partial\theta}| = \varrho^2\sin\theta$, d.h. $\nu = -\phi/\rho$.

Parametrisierung von Flächen durch Funktionsgraphen:

$\phi : \begin{cases} \overline{G} & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto \quad (x, y, f(x, y)) \end{cases}$ falls $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig und in $C^1(G)$ liegt.

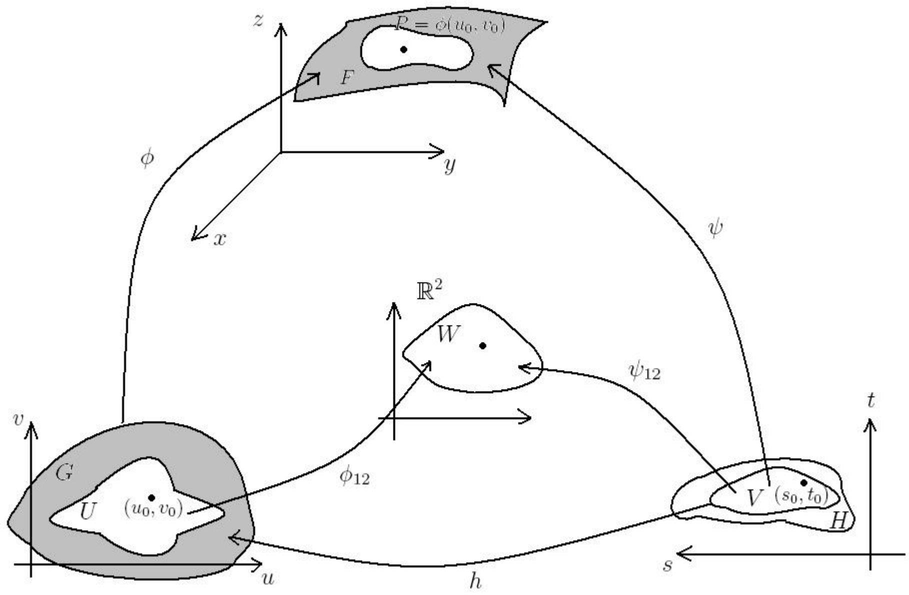
Tangentialvektoren: $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$

Normale: $\nu = \dfrac{(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}}$

Satz 4.10. *Seien $\phi : G \to \mathbb{R}^3$, $\psi : H \to \mathbb{R}^3$ zwei Parametrisierungen derselben Fläche. Dann existiert eine bijektive C^1-Abbildung $h : H \to G$ so, daß $h^{-1} : G \to H$ ebenfalls eine C^1-Abbildung ist und $\psi = \phi \circ h$.*

Bemerkung: Eine bijektive C^1-Abbildung $h : H \to G$ zwischen offenen Mengen heißt Diffeomorphismus, falls h^{-1} auch C^1 ist. Wegen $h^{-1} \circ h = Id$ folgt $\det Dh = (\det Dh^{-1})^{-1} \neq 0$.

Bemerkung: Man schreibt $\phi|_G \sim \psi|_H$, und führt auf der Menge aller Parameterdarstellungen aller offenen Flächen eine Äquivalenzrelation ein. Jede Äquivalenzklasse entspricht genau einer offenen Fläche und umgekehrt.



Definition 4.11 (Inhalt einer Fläche)**.** *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Fläche mit Parameterdarstellung $\phi : G \to F = \phi(G)$. Dann heißt*

$$|F| = \int_G \left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| \, d(u, v)$$

Flächeninhalt von F.

Bemerkung: Wegen $\int_G |\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}| \, d(u, v) = \int_{\overline{G}} |\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}| \, d(u, v)$ setzt man $|\overline{F}| = |F|$ und hat somit auch den Inhalt abgeschlossener Flächen definiert.

Proposition 4.12. *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Dann gilt:*

(a) $|F|$ ist invariant unter Bewegungen.

(b) Ist F in einer Ebene enthalten, dann gilt $|F| = \lambda^2(F)$, falls $\lambda^2(F)$ als 2-dim Lebesguemaß in dieser Ebene aufgefaßt wird.

Satz 4.13. *Der Flächeninhalt einer Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ ist unabhängig von der Parametrisierung.*

Übung: Ist $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ eine 3×2-Matrix und $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix mit $AC = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \overline{b}_1 \\ \overline{a}_2 & \overline{b}_2 \\ \overline{a}_3 & \overline{b}_3 \end{pmatrix}$, dann gilt $\overline{a} \times \overline{b} = (a \times b) \det C$.

Beispiel (Flächeninhalt von $\partial B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^3$): vgl. auch Beispiel nach Definition 4.9. $F = \partial B_\varrho(0)$, $G = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

$$|F| = \int_G \varrho^2 \sin\theta \; d(\varphi, \theta) = 2\pi\varrho^2 \int_0^\pi \sin\theta = 4\pi\varrho^2.$$

Definition 4.14 (Oberflächenintegral)**.** *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $\phi : G \to F$ und $f : F \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt*

$$\overset{F}{\oint} f \; do := \int_G f(\phi(u,v)) \left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| \; d(u,v)$$

Oberflächenintegral von f über F, falls das rechte Integral im Lebesgueschen Sinn existiert (d.h. $f \circ \phi$ messbar auf G und entweder $f \geq 0$ oder $f \circ \phi \in L^1(G)$). Man definiert

$$\overset{\overline{F}}{\oint} f \; do := \overset{F}{\oint} f \; do.$$

Satz 4.15. *Das Oberflächenintegral $\overset{F}{\oint} f \; do$ ist unabhängig von der Parametrisierung der Fläche F.*

Beispiele:

(1) Sei $\phi : \begin{cases} \overline{G} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,\alpha(x,y)) \end{cases}$ die Parametrisierung eines Funktionsgraphen. Dann ist

$$\oint^{F} f\ do = \int_G f(x,y,\alpha(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2}\ d(x,y).$$

(2) $\partial B_r = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2=r^2\}$.

$$\begin{aligned} \oint^{\partial B_r} x^2\ do &= \int_{(0,2\pi)\times(0,\pi)} r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\, r^2\sin\theta\ d(\varphi,\theta) = r^4\pi\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta \\ &= \pi r^4\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)\ d\theta = \pi r^4(2-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^4. \end{aligned}$$

Einfacher:

$$\begin{aligned} \oint^{\partial B_r} x^2\ do &= \oint^{\partial B_r} y^2\ do = \oint^{\partial B_r} z^2\ do \\ &= \frac{1}{3}\oint^{\partial B_r} r^2\ do = \frac{r^2}{3}|\partial B_r| = \frac{r^2}{3}4\pi r^2. \end{aligned}$$

4.3 Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

Ziel: Finde Bedingungen an $V\subset\mathbb{R}^3$, $f : V\to\mathbb{R}^3$ so dass gilt

$$\int_V \operatorname{div} f\ d(x,y,z) = \oint^{\partial V} f\cdot\nu\ do.$$

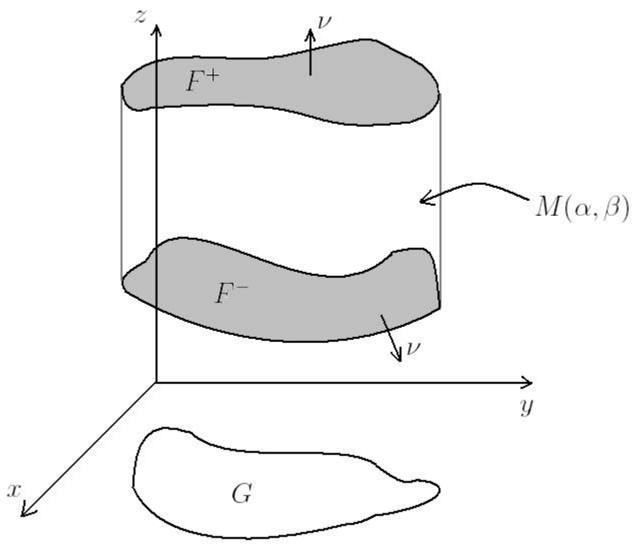
Definition 4.16. *Sei $G\subset\mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und $\alpha,\beta\in C(\overline{G})$ mit $\alpha(x,y)<\beta(x,y)\ \forall\ (x,y)\in G$. Dann heißt die Menge*

$$M(\alpha,\beta) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x,y)\in G \text{ und } \alpha(x,y)<z<\beta(x,y)\}.$$

(offenes) Normalgebiet bzgl. der z-Achse, falls gilt:

(a) $F^- = graph(\alpha)$, $F^+ = graph(\beta)$ sind Flächen,

(b) ∂G besteht aus endlich vielen glatten Jordankurven, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben.



Bemerkung: Ein Normalenvektor $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ auf F^+ mit $\nu_3 > 0$ heißt äußere Normale zu $M(\alpha, \beta)$. Analog heißt ein Normalenvektor ν auf F^- mit $\nu_3 < 0$ äußere Normale.

Lemma 4.17. *Sei $M(\alpha, \beta)$ offenes Normalgebiet bzgl. der z-Achse und $g : F^\pm \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \oint^{F^+} g\nu_3 \, do &= \int_G g(x, y, \beta(x, y)) \, d(x, y) \\ \oint^{F^-} g\nu_3 \, do &= -\int_G g(x, y, \alpha(x, y)) \, d(x, y), \end{aligned}$$

wobei $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ stets die äußere Normale bezeichnet. (Die Existenz der Oberflächenintegrale wird vorausgesetzt).

Satz 4.18 (Gaußscher Integralsatz)**.**

(a) *Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offenes Normalgebiet bzgl. der z-Achse und $g : \overline{V} \to \mathbb{R}$ stetig, $\frac{\partial g}{\partial z} : V \to \mathbb{R}$ existiere und sei stetig und beschränkt. Dann gilt*

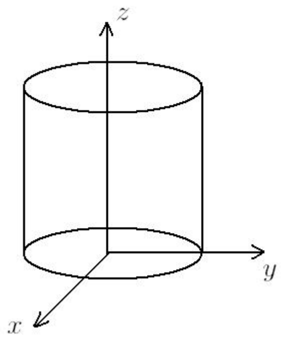
$$\oint^{\partial V} g\nu_3 \, do = \int_V \frac{\partial g}{\partial z} \, d(x, y, z).$$

(b) *Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offenes Normalgebiet bzgl. aller drei Achsen und $f : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ stetig, $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z} : V \to \mathbb{R}$ existieren und seien stetig und* *beschränkt. Dann gilt*

$$\oint_{\partial V} f \cdot \nu \; do = \int_V \operatorname{div} f \; d(x,y,z).$$

Beispiele für Normalgebiete:

(1) Zylinder $V = \{(x,y,z): \; a < z < b, \; x^2 + y^2 < \varrho\}$

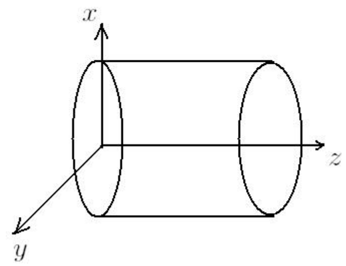


Normalgebiet bzgl. z-Achse: $\alpha(x,y) = a, \; \beta(x,y) = b, \; G = B_\varrho(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$V = \{(x,y,z): \; \alpha(x,y) < z < \beta(x,y): \; (x,y) \in G\}.$$

$\operatorname{graph}(\alpha) = F^+, \operatorname{graph}(\beta) = F^-$ sind Flächen.

Normalgebiet bzgl. x-Achse:



$$V = \{(x,y,z): \; \underbrace{-\sqrt{\varrho^2 - y^2}}_{\alpha(y,z)} < x < \underbrace{\sqrt{\varrho^2 - y^2}}_{\beta(y,z)}, \; (y,z) \in \underbrace{(-\varrho, \varrho) \times (a,b)}_{G}\}.$$

α, β stetig auf $\overline{G}$. Sind $\operatorname{graph}(\alpha), \operatorname{graph}(\beta)$ abgeschlossene Flächen?

$$F^+ = \{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z), \; (\varphi, z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (a,b)\}, \; \overline{F^+} = \operatorname{graph}(\alpha)$$

$$F^- = \{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z), \; (\varphi, z) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times (a,b)\}, \; \overline{F^-} = \operatorname{graph}(\beta)$$

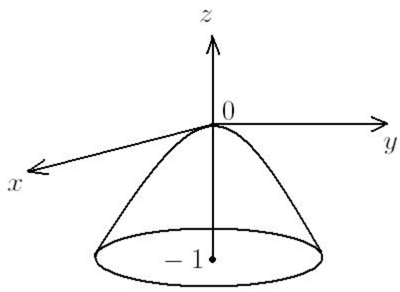
Normalgebiet bzgl. y-Achse:

$$V = \{(x,y,z):\ -\sqrt{\varrho^2 - x^2} < y < \sqrt{\varrho^2 - x^2},\ (x,z) \in (-\varrho,\varrho)\times(a,b)\}.$$

$$F^+ = \{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z),\ (\varphi, z) \in (0,\pi)\times(a,b)\}$$

$$F^- = \{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z),\ (\varphi, z) \in (\pi,2\pi)\times(a,b)\}.$$

(2) Rotationsparaboloid $V = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 < 1,\ -1 < z < -(x^2+y^2)\}$



Normalbereich bzgl. z-Achse: $\alpha(x,y) = -1,\ \beta(x,y) = -(x^2+y^2)$

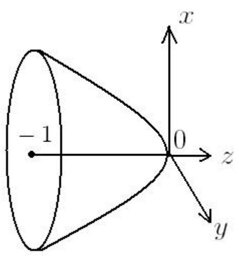
Sind graph(α), graph(β) abgeschlossene Flächen?

Parametrisierung

$$F^+ = \{(x,y,z) = (x,y,-(x^2+y^2)),\ (x,y) \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Analog F^-.

Normalbereich bzgl. x-Achse:



$$V = \{(x,y,z):\ -\sqrt{-z-y^2} < x < \sqrt{-z-y^2},\ \text{mit } (y,z) \in G\}$$

wobei $G = \{(y,z):\ -1 < z < -y^2,\ -1 < y < 1\}$.

Parametrisierung:

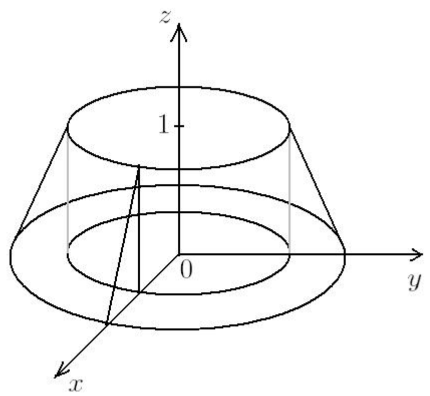
$$F^+ = \left\{(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, -r^2),\ 0 < r < 1,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right\},$$

graph(α) = $\overline{F^+}$. Analog F^-.

In ähnlicher Weise erkennt man, daß V ein Normalbereich bzgl. der y-Achse ist.

(3) Kegelstumpf:

$$V = \{(x,y,z) :\ 0 < z < 1,\ \sqrt{x^2+y^2} < 2-z\}$$



Idee: $V = \bigcup_{i=1}^4 V_i \cup Z$, Z =Zylinder mit Radius 1, Höhe 1

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) : 0 < z < 1,\ x,y \geq 0,\ 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2-z\} \\ &= \{(x,y,z) :\ 0 < z < 2-\sqrt{x^2+y^2},\ 1 < x^2+y^2 < 2,\ x,y > 0\} \end{aligned}$$

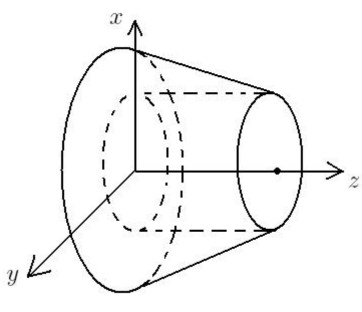
In ähnlicher Weise werden V_2, V_3 und V_4 definiert.

<u>V_1 = Normalbereich bzgl. z-Achse</u>

$$\begin{aligned} F^+ &= \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 2-r),\ \varphi \in (0,\frac{\pi}{2}),\ 1 < r < 2)\} \\ F^- &= \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0),\ \varphi \in (0,\frac{\pi}{2}),\ 1 < r < 2)\} \end{aligned}$$

<u>V_1 = Normalbereich bzgl. x-Achse</u>

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) : 0 < z < 1,\ x,y > 0,\ 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2-z\} \\ &= \{(x,y,z) :\ \underbrace{\sqrt{(1-y^2)_+}}_{=\sqrt{\max\{0,1-y^2\}}} < x < \sqrt{(2-z)^2-y^2}, 0 < y < 2-z,\ 0 < z < 1\} \end{aligned}$$

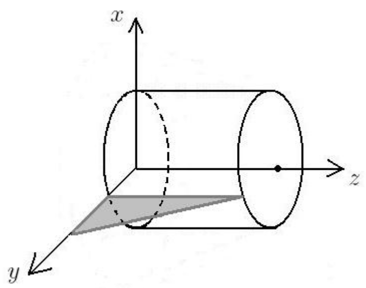


$F^- = \text{graph}\alpha,\ \alpha(y,z) := \sqrt{(1-y^2)_+}$

$\overline{F^-} = \overline{F_1^-} \cup \overline{F_2^-}$, mit

$F_1^- = \{(\cos\varphi, \sin\varphi, z),\ 0 < z < 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ und

$F_2^- = \{(0, \varphi, z) : 0 < z < 1,\ 0 < \varphi < 2 - z\}$.



Eine Parametrisierung von $F_1^- \cup F_2^-$ findet man wie folgt:

$$\phi(\varphi, z) = \begin{cases} (\cos\varphi, \sin\varphi, z), & 0 < z < 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ (0, \varphi - 2, z), & 0 < z < 1,\ 2 < \varphi < 4 - z \end{cases}$$

Damit ist graph$\alpha = \overline{F_1^-} \cup \overline{F_2^-}$ eine abgeschlossene Fläche.

Auch F^+ is eine Fläche, wie man unschwer sieht:

$$F^+ = \{((2-z)\cos\varphi, (2-z)\sin\varphi, z),\ 0 < z < 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$$

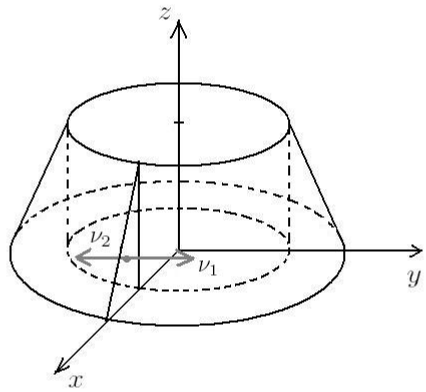
In ähnlicher Weise stellt man fest, daß V_1 = Normalbereich bzgl. der y-Achse ist.

Insgesamt: V ist Vereinigung von 5 Normalbereichen $V_1; V_2, V_3, V_4$ und Z bzgl. aller 3 Achsen.

$$\int_V \operatorname{div} f\ dx = \sum_{i=1}^{4} {}^{\partial V_i}\!\!\oint f \cdot \nu\ do + {}^{\partial Z}\!\!\oint f \cdot \nu\ do.$$

Nun beachte man, daß die äußeren Normalen an den benachbarten Oberflächenstücken gerade entgegengesetzt orientiert sind. Folglich gilt:

$$\int_V \operatorname{div} f\ dx = {}^{\partial V}\!\!\oint f \cdot \nu\ do.$$



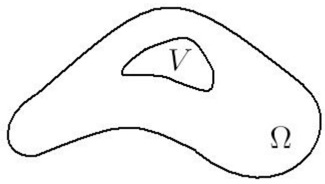
Exkurs: Gaußscher Integralsatz und Wärmeleitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge im $\mathbb{R}^3$, die nach außen wärmeisoliert ist und aus einem wärmeleitfähigem Material besteht. Sei $u(x,t)$ =Wärmemenge zum Zeitpunkt t am Ort $x \in \Omega$. Ziel: Herleitung einer Differentialgleichung für $u(x,t)$.

Sei $V \subset \Omega$ ein Normalgebiet bzgl. aller drei Achsen. Dann betrachten wir folgendes physikalisches Modell der Wärmeleitung:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V u(x,t)\ dx}_{\text{zeitliche Änderung der Wärmemenge in } V} = \underbrace{-\oint_{\partial V} \overrightarrow{F}(x,t)\cdot\nu(x)\ do}_{\text{Zufuhr/Abfluß durch } \partial V} + \underbrace{\int_V f(x,t)\ dx}_{\text{Quellterm}}$$

$\overrightarrow{F}$ =Wärmefluß durch ∂V



f = Quellterm

$f(x,t) \gtrless 0$ bedeutet: am Ort x wird zur Zeit t Wärme erzeugt/vernichtet.

Mit dem Gaußschen Integralsatz:

$$\frac{d}{dt}\int_V u(x,t)\ dx = \int_V \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ dx = \int_V \Big(-\operatorname{div}\overrightarrow{F}(x,t) + f(x,t)\Big)\ dx.$$

Da $V \subset \Omega$ ein beliebiges Normalgebiet ist, gilt folgende Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\operatorname{div}\overrightarrow{F}(x,t) + f(x,t) \quad x \in \Omega,\ t > 0.$$

In unserem Modell der Wärmediffusion wird postuliert, daß $\overrightarrow{F}$ proportional zu ∇u ist, d.h.

$$\overrightarrow{F}(x,t) = -D\nabla u(x,t), \quad D = \text{Diffusionskonstante} > 0.$$

Somit erhalten wir die **inhomogene Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\triangle u(x,t) + f(x,t) \quad x \in \Omega,\ t > 0.$$

Falls kein Quellterm vorhanden ist, so gilt die **homogene Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\triangle u(x,t) \quad x \in \Omega,\ t > 0.$$

Bemerkungen:

(1) $\triangle u(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = \operatorname{div}(\nabla u(x,t))$, wobei

$$\nabla u(x,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x,t), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x,t)\right)^T.$$

(2) T4.1: Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_A f\ dx = 0\ \ \forall\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ so folgt $f \equiv 0$.

Hier wurde etwas ähnliches verwendet: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig,

$$\int_V f\ dx = 0\ \ \forall \text{ Normalgebiete } V \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow f \equiv 0.$$

4.4 Integralsatz von Stokes

Definition 4.19. *Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld.*

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

heißt Rotation des Vektorfelds f. Schreibweisen: $\operatorname{rot} f,\ \nabla \times f$.

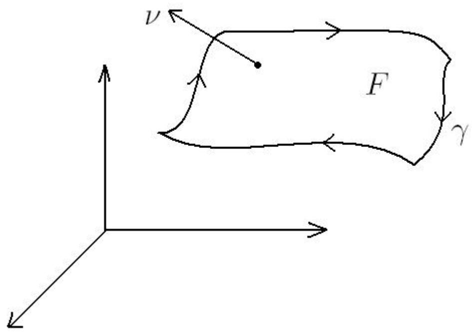
Bemerkung:

(1) Schreibt man $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ und bildet man formal das "Vektorprodukt" $\nabla \times f$, so gilt $\nabla \times f = \operatorname{rot} f$.

(2) In ähnlicher Weise gilt: bildet man formal das "Skalarprdukt" $\nabla \cdot f$, so gilt $\nabla \cdot f = \operatorname{div} f$.

Ziel: Finde Bedingungen an die Fläche F und das Vektorfeld f, so daß gilt:

$$\oint^{F} \operatorname{rot} f \cdot \nu \, do = \int^{\gamma} f \cdot dx.$$



Erinnerung: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ein (stückweiser) C^1-Weg und f ein Vektorfeld, so berechnet man das Wegintegral $\int^{\gamma} f \cdot dx$ in folgender Weise:

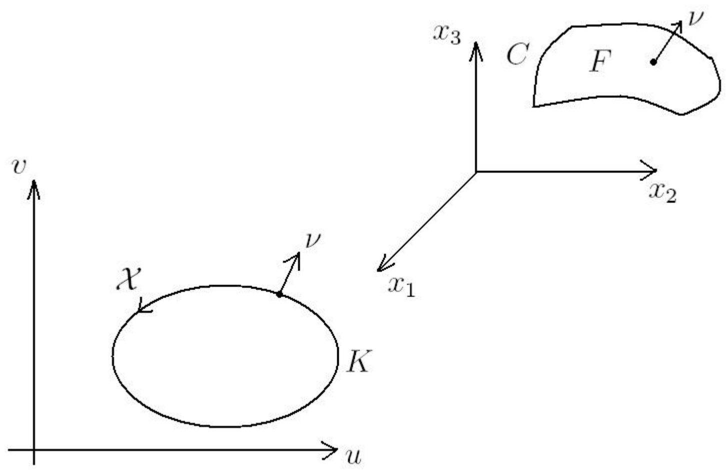
$$\int^{\gamma} f \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Formulierung der Voraussetzungen für den Stokeschen Satz:

(V1) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Normalgebiet bzgl. der u- und v-Achse, welches durch eine stückweise glatte Jordankurve K berandet ist. $\kappa : [0,L] \to \partial G$ sei eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂G mit Bogenlänge als Parameter.

(V2) Sei $\mathcal{U} \supset \overline{G}$ offen und $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ injektiv und $\phi \in C^2(\mathcal{U})$ mit Rang$D\phi = 2$ auf $\mathcal{U}$.

Dann ist $F = \phi(\overline{G})$ eine abgeschlossene Fläche, welche durch die stückweise glatte Jordankurve C mit Parametrisierung $\gamma = \phi \circ \mathcal{X}$ berandet wird.



Satz 4.20 (Integralsatz von Stokes)**.** *Sei $F = \phi(\overline{G})$ wie in (V1), (V2) beschrieben. Ferner sei $f = (f_1, f_2, f_3)$ ein C^1-Vektorfeld auf einer offenen Obermenge von F. Mit*

$$\nu = \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\phi}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial\phi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right|}$$

gilt

$$\overset{F}{\oint} \operatorname{rot} f \cdot \nu \; do = \overset{\gamma}{\int} f \cdot dx.$$

Beispiel (Elektrostatik). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt und $F = \partial\Omega$ sei eine Fläche, auf der wir eine stetige Ladungsverteilung $\varrho : F \to \mathbb{R}$ betrachten. Dann heißt

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{4\pi} \overset{F}{\oint} \frac{\varrho(y)}{|x-y|} do_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus F$$

Potential der Ladungsverteilung ϱ und

$$E(x) = -\nabla\mathcal{U}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$$

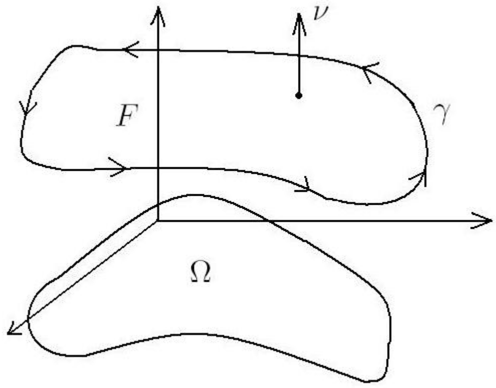
ist das zugehörige elektrische Feld. Da E ein Gradientenfeld ist, folgt mit Kenntnissen aus Analysis II: $\overset{\gamma}{\int} E \cdot dx = 0$ falls $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ ein geschlossener, stückweiser C^1-Weg ist.

<u>Alternative Erklärung desselben Resultats:</u> Sei $F \subset \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ eine Fläche, die (V1), (V2) erfüllt mit zugehörigem Jordan-Weg γ, der den Rand von F

parametrisiert. Dann gilt

$$\int^{\gamma} E \cdot dx = \oint^{F} \operatorname{rot} E \cdot \nu \; do = 0$$

da $\operatorname{rot} E = -\operatorname{rot} \nabla \mathcal{U} = 0$, vgl. (T.11.1).



Beachte: Die alternative Erklärung ist weniger aussagekräftig, da nur eine kleinere Klasse von Wege (nur solche die F beranden) betrachtet werden kann.

4.5 m-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$, $(m < n)$

Definition 4.21 (m-dim. Fläche im $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen. Die Abbildung $\phi : \overline{G} \to \mathbb{R}^m$ besitze folgende Eigenschaften:*

(i) ϕ sei injektiv, stetig differenzierbar in G,

(ii) ϕ sei Lipschitzstetig auf $\overline{G}$,

(iii) $RangD\phi = m$ in G,

(iv) $\phi(G)$, $\phi(\partial G)$ seien disjunkt.

Dann heißt $F = \phi(G)$ offene m-dimensionale Fläche mit Parametrisierung ϕ. $\phi(\overline{G})$ heißt abgeschlossene Fläche, $\phi(\partial G)$ heißt Rand der Fläche.

Definition 4.22. *$F = \phi(G)$ sei m-dim. Fläche im $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung $\phi = \phi(u_1, \ldots, u_m)$. Dann heißt die $m \times m$-Matrix $(g_{ij})_{i,j=1}^m$ gebildet durch*

$$(g_{ij})(u) = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial u_i}(u) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u_j}(u)}_{\textit{Skalarprodukt im } \mathbb{R}^m}, \quad i, j = 1, \ldots, m$$

metrischer Tensor von F.

Definition 4.23 (Gramsche Determinante)**.** *Seien $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$ m Spaltenvektoren und $B = (b_1|b_2|\ldots|b_m)$. Dann heißt*

$$grB := \det \underbrace{B^T \cdot B}_{m\times m\textit{-Matrix}}$$

Gramsche Determinante von B. Es gilt

$$grB = \det\left((b_i \cdot b_j)_{i,j=1}^m\right).$$

Definition 4.24 (Inhalt einer m-dim. Fläche)**.** *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ offene m-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$|F| = \int_G \sqrt{g(u)}\ du \quad \textit{mit } g = grD\phi$$

m-dimensionaler Inhalt der Fläche F.

Definition 4.25. *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ m-dim. Fläche mit Parametrisierung $\phi : G \to F$ und $f : F \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt*

$$\oint^F f\ do := \int_G f(\phi(u))\sqrt{g(u)}\ du$$

Integral von f über F (die Existenz des m-dimensionalen Lebesgue-Integrals über G muß hierbei vorausgesetzt werden).

Bemerkungen: Es gilt festzustellen, daß

(1) $|F|$ und $\oint^F f\ do$ unabhängig von der Parametrisierung sind,

(2) $|F|$ invariant bzgl. Bewegungen des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir benutzen (Beweis durch Nachrechnen) zwei Resultate aus der linearen Algebra:

(a) Für $S \in \mathcal{O}(n)$ gilt: $\mathrm{gr}(SB) = \mathrm{gr}B$

(b) Für $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt: $\mathrm{gr}(BC) = (\det C)^2 \mathrm{gr}B$

Bevor der Beweis geführt wird, betrachten wir zuerst:

3 Spezialfälle:

(i) $m = 1,\ n \geq 2,\ G = (a, b),\ F = \phi(G)$ sei 1-dim. Fläche. Dann ist F eine glatte Jordankurve und $\sqrt{g} = \sqrt{\mathrm{gr}\phi'} = \sqrt{\phi'^T \cdot \phi'} = |\phi'|$, d.h. $|F|$ ist die wohlbekannte Länge der Jordankurve und

$$^F\!\!\oint f\ do = {}^F\!\!\int f\ ds$$

ist das wohlbekannte Kurvenintegral.

(ii) $m = 2,\ n = 3,\ g(u) = \mathrm{gr}D\phi = \left|\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right|^2,$

denn $\mathrm{gr}(b_1\ b_2) = |b_1 \times b_2|^2$ falls $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ Spaltenvektoren sind.

(iii) Seien $b_1, \ldots, b_m$ m linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$P(b_1, \ldots, b_m) = \{u_1 b_2 + \ldots + u_m b_m :\ 0 \leq u_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, m\}$$

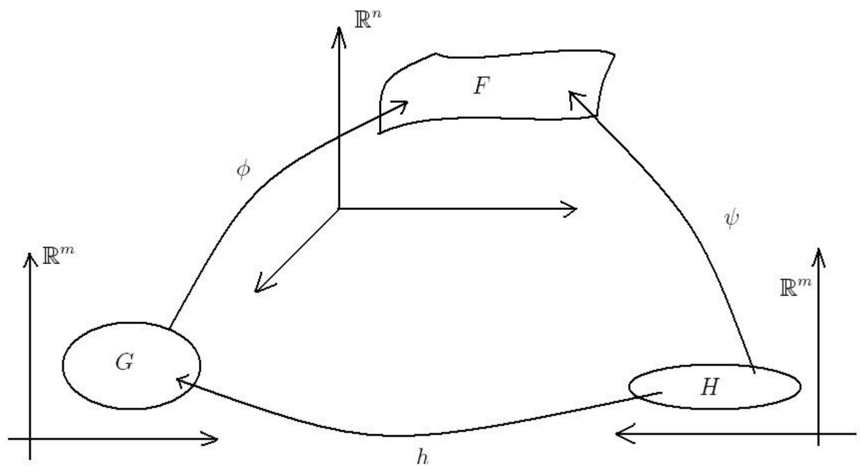
Parallelotop. Setze $B = (b_1|b_2|\ldots|b_m),\ u = (u_1, \ldots, u_m)^T$. Dann ist $P(b_1, \ldots, b_m) = \phi(\overline{G})$, wobei $G = (0,1)^m$ der m-dimensionale Einheitswürfel ist und $\phi(u) = Bu$. Also ist P eine abgeschlossene Fläche. Mit Definition 4.24 folgt

$$|P| = \int_G \sqrt{\mathrm{gr}D\phi(u)}\ du = \int_G \sqrt{\mathrm{gr}B}\ du = \sqrt{\mathrm{gr}B},$$

eine in der linearen Algebra wohlbekannte Formel.

Zum Nachweis von (1): Seien $\phi : G \to F,\ \psi : H \to F$ zwei Parametrisierungen der Fläche F. Wie in Satz 4.10 gibt es eine bijektive C^1-Abbildung $h : H \to G$ mit $\psi = \phi \circ h$. Aus $D\psi = D\phi \cdot Dh$ folgt $\mathrm{gr}D\psi = (\det Dh)^2 \mathrm{gr}D\phi$. Mit der Substitutionsregel folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_G (f \circ \phi)(u)\sqrt{(\mathrm{gr}D\phi)(u)}\ du \\
\overset{u=h(v)}{=}\quad & \int_H (f \circ \psi)(v)\sqrt{(\mathrm{gr}D\phi)(h(v))}|(\det Dh)(v)|\ dv \\
=\quad & \int_H (f \circ \psi)(v)\sqrt{(\mathrm{gr}D\psi)(v)}\ dv.
\end{aligned}$$



Zum Nachweis von (2): Sei $S \in \mathcal{O}(n)$ orthogonale Matrix und $T : x \mapsto Sx + a$ eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$. Ist $\phi : G \to F$ Parametrisierung von F, dann ist $\psi = T \circ \phi$ Parametrisierung von TF. Wegen $D\psi = SD\phi$ folgt $\mathrm{gr}D\psi = \mathrm{gr}D\phi$, also $|F| = |TF|$.

Zusatz: Liegt F in dem von $e_1, \ldots, e_m$ aufgespannten Teilraum des $\mathbb{R}^n$ so gilt $\phi(u_1, \ldots, u_m) = (\phi_1(u), \ldots, \phi_m(u), 0, \ldots, 0)$. $\phi^*(u) := (\phi_1(u), \ldots, \phi_m(u))$. Dann gilt $\mathrm{gr}D\phi = (\det D\phi^*)^2$ und folglich

$$|F| = \int_G |\det D\phi^*| \; du = \int_F 1 \; dx = m\text{-dim Lebesgue-Maß von } F = \phi(G).$$

Zuletzt betrachten wir den **Gaußschen Integralsatz im** $\mathbb{R}^n$. Hierbei werden offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet, deren Ränder ∂V $n-1$-dimensionale Flächen sind.

Definition 4.26. *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, beschränkt und $\alpha, \beta \in C(\overline{G})$ mit $\alpha(\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1}}_{=x'}) < \beta(x_1, \ldots, x_{n-1}) \;\forall\; x' \in G$.*

$$M(\alpha, \beta) = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x' \in G, \; \alpha(x') < x_n < \beta(x')\}$$

heißt offenes Normalgebiet bzgl. der x_n-Achse, falls $\partial M(\alpha, \beta)$ eine $n-1$-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$ ist.

Dann gilt der Gaußsche Integralsatz: Ist $f : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f \in C^1(V)$ mit beschränkten Ableitungen, dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} f \, dx = \oint_{\partial V} f \cdot \nu \, do,$$

wobei ν die äußere Normale bezeichnet.

Beispiel: $V = B_1(0) =$ Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$, $\partial V =$ Oberfläche der Einheitskugel, $f(x) = x$, $\operatorname{div} f = n$.

$$n|B_1(0)| = \int_{B_1(0)} \operatorname{div} f \, dx = \oint_{\partial B_1(0)} f \cdot \nu \, do = \oint_{\partial B_1(0)} 1 \, do = |\partial B_1(0)|.$$

Erinnerung aus 3.5: $|B_1(0)| = \frac{\omega_n}{n}$, wobei

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = 2\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin\theta_1 (\sin\theta_2)^2 \cdots (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2},$$

d.h. die aus Abschnitt 3.5 bekannte Zahl ω_n erkennen wir nun gerade als das Oberflächenmaß der $n-1$-dim Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$: $\omega_n = |\partial B_1(0)|$.

Kapitel 5

L^p-Räume und Fourier-Reihen

Ziele:

(A) Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \le p < \infty$. Definiere

$$L^p(X) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ meßbar: } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Wir werden die Banachraumstruktur von $L^p(X)$ zeigen.

(B) Zu $f \in L^1(-\pi, \pi)$ definiere die Fourier-Koeffizienten von f

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

und betrachte die Fourier-Reihe

$$S(t; f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

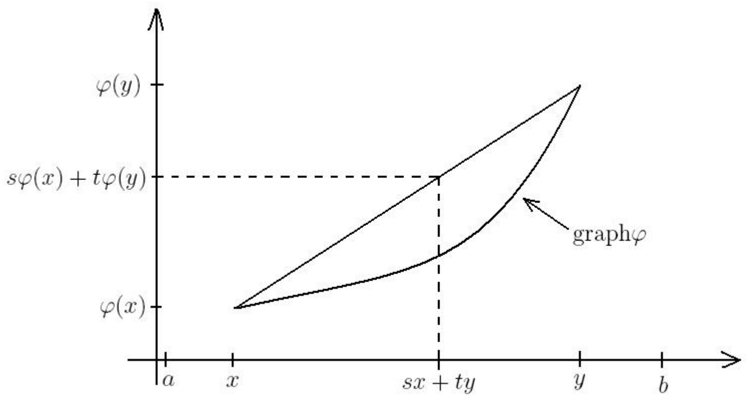
Wir werden untersuchen, unter welchen Bedingungen $f(t) = S(t; f)$ gilt.

5.1 Konvexe Funktionen und Integralungleichungen

Definition 5.1. *Eine Funktion $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls gilt*

$$\varphi(sx + ty) \le s\varphi(x) + t\varphi(y)$$

$\forall\ x, y \in (a, b)$ *und* $\forall\ s, t \in [0, 1]$ *mit* $s + t = 1$.



Lemma 5.2. *$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\varphi \text{ konvex } \Leftrightarrow \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \quad \forall a < s < t < u < b$$

Korollar 5.3. *$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion. Dann gilt*

$$\varphi \text{ konvex } \Leftrightarrow \varphi' \text{ monoton wachsend.}$$

Lemma 5.4. *$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei konvex. Dann ist φ stetig auf (a,b).*

Satz 5.5 (Jensensche Ungleichung)**.** *Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ Maßraum, $A \in \mathfrak{M}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $f \in L^1(A)$. Ist $a < f(x) < b \ \forall\, x \in A$ und $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex ($a = -\infty,\ b = +\infty$ sind zugelassen), dann gilt*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \ d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A \varphi(f) \ d\mu.$$

Beispiele:

(a) $e^{\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \ d\mu} \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A e^f \ d\mu.$

(b) $x = (x_1, \ldots, x_n)$, μ Zählmaß

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i} &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{f_i}, \quad e^{f_i} = y_i > 0 \\ \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} &\leq \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \qquad \text{(AGM-Ungleichung).} \end{aligned}$$

Satz 5.6. *$f, g : X \to [0, \infty]$ seien meßbar und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

(i) $\int_X fg \ d\mu \leq \left(\int_X f^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \ d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ *(Hölder Ungleichung).*

Sind alle Integrale $< \infty$ so gilt " $=$ " genau dann, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit $\alpha f^p = \beta g^q$ f.ü. auf X.

(ii) $\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ *(Minkowski-Ungleichung).*

Sind alle Integrale $< \infty$ so gilt " $=$ " genau dann, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit $\alpha f = \beta g$ f.ü. auf X.

5.2 L^p-Räume

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Frage: Kann man einer meßbaren Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ein sinnvolles Supremum zuordnen? Wir benutzen im Folgenden die Konvention $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Definition 5.7. *Zu einer meßbaren Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiere*

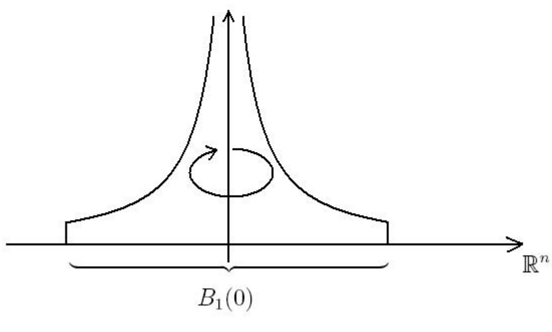
$$\begin{aligned} \beta &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \ f^{-1}(\alpha, \infty] \text{ ist Nullmenge}\} \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \ f(x) \leq \alpha \text{ für fast alle } x \in X\}. \end{aligned}$$

β heißt essentielles Supremum von f. Schreibweise: $\operatorname{ess\,sup}_X f$.

Bemerkung: In ähnlicher Weise kann man auch das essentielle Infimum einer meßbaren Funktionen definieren.

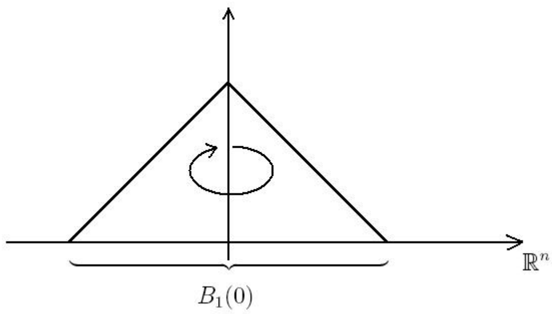
Beispiel: (a) $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ \text{bel.}, & x = 0 \end{cases}$.

$\operatorname{ess\,sup}_X f = +\infty$



(b) $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \neq 0 \\ \text{bel.}, & x = 0 \end{cases}$.

$\operatorname{ess\,sup}_X f = 1$.



Definition 5.8. *Sei* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *ein Maßraum.*

(a) *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Definiere*

$$L^p(X) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ meßbar: } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Für $f \in L^p(X)$ *definiere* $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

(b) *Sei* $p = \infty$. *Definiere*

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ meßbar: } \operatorname{ess\,sup}_X |f| < +\infty\}.$$

Für $f \in L^\infty(X)$ *definiere* $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

Beispiel: Sei $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}$ die Lebesguesche σ-Algebra auf der Grundmenge $\mathbb{R}^n$ und λ das Lebesgue-Maß (wir schreiben dx anstelle von $d\lambda$). Wir betrachten die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche α liegt $f \in L^p(X)$? Mit n-dimensionalen Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} |x|^{\alpha p} dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi}_{n-2 \text{ Stück}} r^{\alpha p} r^{n-1} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \cdots \sin^{n-2}\theta_{n-2} \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-2} \\
&= \omega_n \int_0^1 r^{\alpha p + n - 1} dr \\
&= \begin{cases} \frac{\omega_n}{\alpha p + n} \, r^{\alpha p + n}\big|_0^1, & \alpha p + n \neq 0 \\ \omega_n \log r\big|_0^1, & \alpha p + n = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} < +\infty & \alpha p + n > 0 \\ = +\infty & \alpha p + n \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Als Ergebnis halten wir fest:
$|x|^\alpha \in L^p(X) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p}$ $(1 \leq p < \infty)$
$|x|^\alpha \in L^\infty(X) \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.

Satz 5.9 (Erweiterung der Hölder und Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *ein Maßraum.*

(i) $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(dabei sei* $\frac{1}{\infty} = 0$*). Ist* $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ *so folgt* $f \cdot g \in L^1(X)$ *und* $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

(ii) $1 \leq p \leq \infty$. *Sind* $f, g \in L^p(X)$ *so folgt* $f + g \in L^p(X)$ *und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Frage: Ist $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum?

Antwort:

$$\left.\begin{array}{rcll} \|f+g\|_p & \leq & \|f\|_p + \|g\|_p & \text{okay} \\ \|\lambda f\|_p & = & |\lambda| \|f\|_p & \text{okay} \end{array}\right\} \Rightarrow L^p(X) \text{ ist jedenfalls ein Vektorraum.}$$

$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$? Stimmt nicht; es gilt nur $f = 0$ f.ü. auf X.

Definition 5.10. *Sei* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *meßbar. Definiere die Relation*

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ f.ü. auf } X.$$

Dann ist $f \sim g$ *eine Äquivalenzrelation (Übung). Definiere Äquivalenzklassen* $[f] = \{g : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ meßbar}, \ f \sim g\}$.

Definition 5.11. *Sei* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *ein Maßraum und* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere die Menge* $\mathcal{L}^p(X) = \{[f] : \ f \in L^p(X)\}$ *aller Äquivalenzklassen. Die Menge* $\mathcal{L}^p(X)$ *besitzt Vektorraumstruktur*

$$\begin{array}{rcl} [f] + [g] & := & [f+g] \\ \lambda[f] & := & [\lambda f] \end{array}$$

sowie eine Norm

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p.$$

Beachte: sowohl die Vektorraum-Operationen also auch die Norm sind wohldefiniert (Übung). Weiterhin gilt

$$\|[f] + [g]\|_p = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|[f]\|_p + \|[g]\|_p$$

sowie

$$\|\lambda[f]\|_p = \|[\lambda f]\|_p = \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p = \|\lambda| \|[f]\|_p$$

und

$$\|[f]\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ f.ü. } \Rightarrow [f] = 0.$$

Folgerung: $(\mathcal{L}^p(X), \|\cdot\|_p)$ ist ein normierter Raum.

Beachte: In der Praxis werden $\mathcal{L}^p(X)$ und $L^p(X)$ so gut wie nie unterschieden.

Satz 5.12. *Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der normierte Raum $(\mathcal{L}^p(X), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.*

Korollar 5.13. *Ist $(f_n)_{n\geq 1}$ Cauchyfolge in $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i\geq 1}$ und $f \in L^p(X)$ mit $f_{n_i}(x) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ f.ü. auf X.*

Hinweis: Im obigen Korollar kann die Behauptung im Allgemeinen nicht verschärft werden zu

$$f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ f.ü. auf X,}$$

vgl. Alt (Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag), Lemma 1.18 und Übungsaufgabe Ü 1.5.

5.3 Dichte Teilmengen in $L^p(X)$

Definition 5.14. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt dicht in V (dichte Teilmenge von V), falls gilt:*

$$\forall\, x \in V\ \exists \text{ Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \|a_n - x\| = 0.$$

Beispiele:

1) $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

2) Polynome liegen dicht in $C([a,b])$ (Satz von Weierstraß)

Satz 5.15. *Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und*

$$S(X) = \{s : X \to \mathbb{R},\ s \text{ meßbare Elementarfunktion}\}.$$

Für $1 \leq p < \infty$ ist $S(X)$ dichte Teilmenge von $L^p(X)$.

Satz 5.16. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathfrak{M}$ die Lebesguesche σ-Algebra und λ das Lebesguesche Maß (wir schreiben dx anstelle von $d\lambda$). Ferner sei*

$$C_c^\infty(X) = \{C^\infty\text{-Funktionen } f : X \to \mathbb{R} \text{ mit Träger}(f) \text{ kompakt}\},$$

wobei Träger$(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. Dann liegt für $1 \leq p < \infty$ die Menge $C_c^\infty(X)$ dicht in $L^p(X)$.

Bemerkung: Satz 5.16 gilt für $p = \infty$ nicht. Denn falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C_c^\infty(X)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig, d.h. die Grenzfunktion ist automatisch stetig. Aber in $L^\infty(X)$ gibt es unstetige Funktionen, z.B. $X = (0,2) \subset \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 2 & x \in [1,2) \end{cases}, \quad f \text{ unstetig, aber } f \in L^\infty(X)$$

Bemerkung: Die Abschnitte 5.2 und 5.3 lassen sich auf komplexwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ übertragen, z.B.

$$1 \leq p < \infty \quad L^p(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meßbar: } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

mit $\|f\|_p$ wie zuvor.

5.4 Fourier-Reihen (Begriffe und Definitionen)

Definition 5.17. *Sei $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}$$

trigonometrische Reihe. Dabei ist die Reihe definiert als Folge der p-ten Teilsummen

$$\left(\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int}\right)_{p\in\mathbb{N}}.$$

Bemerkung: Setzt man $a_0 := 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int} &= c_0 + \sum_{n=1}^{p} \left(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right). \end{aligned}$$

Definition 5.18. *Ist $f \in L^1(-\pi,\pi)$ so definiere für $n \in \mathbb{Z}$*

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

sowie die trigonometrische Reihe

$$S(t;f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

c_n heißt n-ter Fourier-Koeffizient der Funktion f; Schreibweise: $c_n(f)$. Die Reihe $S(t;f)$ heißt Fourier-Reihe der Funktion f.

Beachte:

(a) f kann reell- oder komplexwertig sein

(b) Ist f reellwertig so gilt

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt} = \overline{c_n}$$

d.h., sind a_n, b_n wie in der Bemerkung nach Definition 5.17 definiert, so gilt

$$a_0 = \overline{a_0}, \quad a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n, \quad b_n = 2\,\mathrm{Im}\,c_n$$

und damit

$$S(t;f) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n \sin nt)$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{int}+e^{-int})\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{int}-e^{-int})\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \end{aligned}$$

Man erkennt daraus insbesondere, daß die Fourier-Reihe einer reellwertigen Funktion selbst wieder reellwertig ist.

5.5 Punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe

Lemma 5.19 (Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten)**.** *Seien $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) $|c_n(f)| \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$; $c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$

(b) $f \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad S(t;1) \equiv 1$

(c) $f \in C^1[-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi) \quad \Rightarrow \quad c_n(f') = inc_n(f)$

(d) $c_n(e^{it}f) = c_{n-1}(f)$

(e) Die Funktion $f \in L^1(-\pi,\pi)$ *sei* 2π*-periodisch auf* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt und* $f_a(t) := f(t+a)$. *Dann ist* $c_n(f_a) = e^{ina}c_n(f)$ *und* $S(t;f_a) = S(t+a;f)$.

Satz 5.20 (Satz von Riemann-Lebesgue)**.** *Ist* $f \in L^1(-\pi,\pi)$ *so gilt*

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0.$$

Satz 5.21 (Konvergenzsatz)**.** *Sei* $f \in L^1(-\pi,\pi)$ 2π*-periodisch auf* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt. Zu* $a \in [-\pi,\pi]$ *existiere* $c \in \mathbb{R}$ *und* $\delta > 0$ *so, daß gilt*

$$\frac{f(t)-c}{t-a} \in L^1(a-\delta, a+\delta). \qquad ^\dagger$$

Dann konvergiert die Fourier-Reihe $S(t;f)$ *an der Stelle* a *gegen den Wert* c*, d.h.* $S(a;f) = c$.

Definition 5.22. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,* $\alpha \in (0,1]$ *und* $x_0 \in I$.

(a) f *heißt* α*-Hölder-stetig an der Stelle* x_0*, falls* $\delta, K > 0$ *existieren mit*

$$|f(x) - f(x_0)| \le K|x - x_0|^\alpha \quad \forall\, x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

(b) f *heißt* α*-Hölder-stetig in* I*, falls* f *an jeder Stelle* $x_0 \in I$ α*-Hölder-stetig ist.*

(c) f *heißt gleichmäßig* α*-Hölder-stetig, falls* $K > 0$ *existiert mit*

$$|f(x) - f(x_0)| \le K|x - x_0|^\alpha \quad \forall\, x, y \in I.$$

Beispiel: $\sqrt{x}$ ist gleichmäßig $\frac{1}{2}$-Hölder-stetig auf $[0,\infty)$. Sei $0 \le x \le y$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{y} - \sqrt{x} \overset{?}{\le} \sqrt{y-x} \\ \Leftrightarrow\quad & y + x - 2\sqrt{xy} \le y - x \\ \Leftrightarrow\quad & x \le \sqrt{xy} \\ \Leftrightarrow\quad & x \le y \end{aligned}$$

† Man beachte, daß man der Funktion $\frac{f(t)-c}{t-a}$ an der Stelle $t = a$ keinen Wert zuweisen muß.

Korollar 5.23. *$f \in L^1(-\pi, \pi)$ sei 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Ist f α-Hölder-stetig (mit $\alpha \in (0,1]$) an der Stelle $a \in [-\pi, \pi]$, dann gilt $S(a; f) = f(a)$, d.h. die Fourier-Reihe von f an der Stelle a konvergiert gegen $f(a)$.*

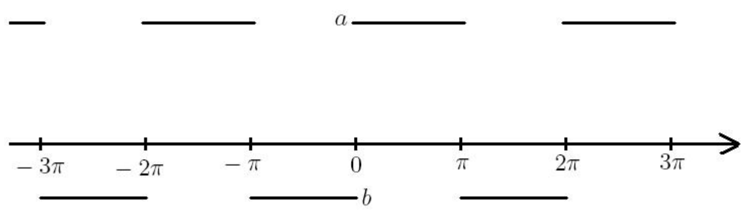
Korollar 5.24. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch. Ist*

$$f \begin{cases} C^1\text{-Funktion auf } [-\pi, \pi] \\ \text{oder Lipschitz-stetig auf } [-\pi, \pi] \\ \text{oder sogar nur } \alpha\text{-Hölder-stetig auf } [-\pi, \pi] \end{cases}$$

dann gilt $S(t; f) = f(t)\ \forall\ t \in [-\pi, \pi]$.

Korollar 5.25. *Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$ 2π-periodisch, dann konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen f.*

Beispiel:



Die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} b & -\pi < t < 0 \\ a & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad \text{sei } 2\pi\text{-periodisch auf } \mathbb{R} \text{ fortgesetzt.}$$

Die Funktionswerte von f bei $0, \pi, -\pi$ sind unerheblich für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten bzw. der Fourier-Reihe. Für $n \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} b e^{-int}\, dt + \int_{0}^{\pi} a e^{-int}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i}{n}\, b e^{-int} \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{i}{n}\, a e^{-int} \Big|_{0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{ib}{n}(1 - \cos n\pi) + \frac{ia}{n}(\cos n\pi - 1) \right) \\ &= \frac{i}{2n\pi}(1 - \cos n\pi)(b - a) = \frac{i(b-a)}{2n\pi}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Beachte, daß $c_n = c_{-n}$ gilt, sowie $c_0 = \frac{1}{2}(b+a)$.

$$S(t;f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(b-a)}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nt$$

Wegen Korollar 5.23 gilt $S(t;f) = f(t)$ für alle $t \notin \{0, \pi, -\pi\}$. Wie verhält sich nun die Fourier-Reihe bei $t = 0$ (bzw. $t = \pm\pi$)? Es gilt

$$S(0;f) = \frac{1}{2}(b+a)$$

d.h. die Fourier-Reihe bei $t = 0$ konvergiert gegen den Mittelwert der Limiten von links und rechts – unabhängig davon, wie $f(0)$ definiert ist.

Satz 5.26 (Konvergenz an Sprungunstetigkeiten)**.** *Sei $f \in L^1(-\pi,\pi)$ 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Zu $a \in [-\pi,\pi]$ existiere $c^+, c^- \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ so, daß*

$$\frac{f(t)-c^-}{t-a} \in L^1(a-\delta, a), \quad \frac{f(t)-c^+}{t-a} \in L^1(a, a+\delta).$$

Dann konvergiert die Fourier-Reihe $S(t;f)$ an der Stelle a gegen den Wert $\frac{c^+ + c^-}{2}$, d.h. $S(a;f) = \frac{c^+ + c^-}{2}$.

Bemerkung: In den Anwendungen ist oft $c^\pm = \lim_{t\to a^\pm} f(t)$.

5.6 L^2-Konvergenz der Fourier-Reihe

$L^2(-\pi,\pi)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Beachte:

$$\begin{aligned} |\langle f,g\rangle| &\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(t)|\, dt \\ &\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle e^{int}, e^{imt}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 2\pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

d.h. die Funktionen $\left\{u_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ bilden ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $L^2(-\pi,\pi)$. Für die Fourier-Reihe gilt die Beziehung

$$S(t;f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, u_n\rangle u_n(t).$$

Satz 5.27. *Sei $k,l \in \mathbb{Z},\ k < l$ und $V = [u_k,\dots,u_l] \subset L^2(-\pi,\pi)$. Dann gilt für $f \in L^2(-\pi,\pi)$:*

$$\|f - \sum_{n=k}^{l}\langle f,u_n\rangle u_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=k}^{l}|\langle f,u_n\rangle|^2 \le \|f-v\|_2^2 \quad \forall\ v \in V.$$

Bemerkung: Der obige Satz besagt unter anderem, daß $\sum_{n=k}^{l}\langle f,u_n\rangle u_n$ die Bestapproximation an f aus V ist.

Satz 5.28. *Sei $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Die Fourier-Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,u_n\rangle u_n$ konvergiert im Sinne der L^2-Konvergenz.*

Nachdem nun geklärt ist, daß die Fourier-Reihe einer gegebenen Funktion $f \in L^2(-\pi,\pi)$ im Sinn der L^2-Konvergenz gegen eine Grenzfunktion f^* konvergiert (dieses Resultat benutzt u.A. die Vollständigkeit des Raumes $L^2(-\pi,\pi)$), so stellt sich als nächstes die Frage, gegen welche Funktion f^* die Fourier-Reihe konvergiert. Die Antwort fällt nicht anders aus, als erwartet.

Satz 5.29. *Sei $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Dann gilt $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,u_n\rangle u_n = f$ im Sinne der L^2-Konvergenz. Insbesondere gilt die "=" punktweise f.ü. auf $(-\pi,\pi)$.*

Anwendung auf partielle Differentialgleichungen:

1-dim. Wärmeleitungsgleichung:	$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$	$=$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad x \in (0,\pi),\ t > 0$
Randbedingungen (Wärmeisolierung):	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$	$=$	$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$
Anfangsbedingung zur Zeit $t=0$:	$u(x,0)$	$=$	$f(x) \quad x \in (0,\pi).$

Ideen:

1. Es gibt spezielle Lösungen der Wärmeleitungsgleichung in der Form $u(x,t) = a(x)b(t)$. Man bestimmt die Funktionen a und b, indem man den Ansatz in die Wärmeleitungsgleichung einsetzt:

$$b'(t)a(x) = b(t)a''(x), \quad \frac{b'(t)}{b(t)} = \frac{a''(x)}{a(x)} = \text{const.} = c$$

$$b(t) = e^{ct}, \quad a(x) = \begin{cases} \alpha e^{\sqrt{c}x} + \beta e^{-\sqrt{c}x}, & c > 0 \\ \alpha \cos\sqrt{-c}x + \beta \sin\sqrt{-c}x, & c < 0 \\ \alpha + \beta x, & c = 0 \end{cases}.$$

Wegen der Randbedingungen muß gelten $a'(0) = a'(\pi) = 0$. Daher ergibt sich

$c > 0$	$c < 0$	$c = 0$
$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0 \\ \alpha e^{\sqrt{c}\pi} - \beta e^{-\sqrt{c}\pi} &= 0 \end{aligned}\right\}$ unmöglich	$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \sin\sqrt{-c}\pi &= 0 \end{aligned}$	$\beta = 0$

Folgich muß $c = -n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ sein, und wir erhalten als spezielle Lösungen

$$u(x,t) = \alpha_n \cos(nx) e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

2. Entwicklung der Anfangstemperatur f in eine reine Cosinusreihe:

   $f \in L^2[0,\pi]$. Setze f gerade auf $[-\pi,\pi]$ fort, d.h.

   $$f(x) = f(-x), \ x \in [-\pi, 0].$$

   Dann gilt:

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

   mit

   $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

   $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

   Folglich gilt

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

3. Lösung des Anfangs-Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung:

   Idee: $\boxed{u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx e^{-n^2 t}}$ mit a_n wie unter 2.

   Offensichtlich löst jeder einzelne Summand die Wärmeleitungsgleichung.

Folgende Eigenschaften von $u(x,t)$ lassen sich beweisen:

(a) u besitzt stetige partielle Ableitungen der Ordnung 2 nach x und der Ordnung 1 nach t [sogar: $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$]

(b) u löst die Wärmeleitungsgleichung

(c) u erfüllt die Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$.

(d) $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ im Sinne der L^2-Konvergenz

(e) $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx =$ gemittelte Anfangswärmemenge