$\Delta u = 0$ in Ω, $0 = u(q,0) = \inf_{\Omega} u$ und

$\nabla u(q,0) = \sigma$. Grund: in $p = (q,0)$ erfüllt Ω nicht die innere Kugel-Bedingung.

Beispiel 2
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, beschränkt}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Aus $f \geq 0$ folgt mit Satz 8 (Minimumprinzip) $u \geq \inf_{\partial\Omega} u = 0$.

Ist zusätzlich $\partial\Omega \in C^{m+2}$, $f \in W^{m,2}(\Omega)$, $m > \frac{n-2}{2}$

dann gilt (wg. Bsp. 3 (Reg.-Th.)) $u \in W^{m+2,2}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar\Omega)$ $\quad [W^{l,2}(\bar\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar\Omega), \ l > \frac{n+2}{2}]$

Ist $f \not\equiv 0$ so nimmt u wegen Satz 11 (starkes Minimumprinzip) in keinem Punkt von Ω sein Minimum an (denn $u \equiv \inf_{\Omega} u = 0$ impliziert $-\Delta u = 0$ in Ω).

Ergebnis: $f = 0 \Rightarrow u = 0$ in Ω

$f \underset{\not\equiv}{\geq} 0 \Rightarrow u > 0$ in Ω.

4. Eigenwertprobleme

4.1. Eigenwertprobleme für symmetrische, kompakte Operatoren auf Hilberträumen

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $A: H \to H$ linear.

Definition 1

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von A, falls $\operatorname{Kern}(A-\lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

$\sigma_p(A)$ = Menge der Eigenwerte von A
= Punktspektrum von A

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von A, so heißt $\operatorname{Kern}(A-\lambda \mathrm{Id})$ Eigenraum zum Eigenwert λ und jedes Element $u \in \operatorname{Kern}(A-\lambda \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition 2 $A: H \to H$ heißt symmetrisch, falls gilt
$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x,y \in H$

Satz 3 Ist $A: H \to H$ symmetrisch, dann ist A beschränkt und es gilt $A^* = A$.

Beweis: Die Aussage der Beschr.heit ist einer der Hauptsätze der Funktionalanalysis (vgl. Satz von Hellinger-Toeplitz, Heuser „FA"). Wenn man schon weiß, daß A beschränkt ist, dann ex. also A^* und wegen
$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x,y \in H$ folgt $A = A^*$. ∎

25.06.2015

Erinnerung aus „DGLen und Hilberträume" (vgl. Skript)

H heißt separabel, falls es eine abzählbare, dichte Teilmenge in H gibt.

Satz 4 (Spektralsatz für symmetrische, kompakte Operatoren)
Sei H separabel und $A: H \to H$ symmetrisch und kompakt. Dann existiert eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis

$\{u_i\}$ aus Eigenvektoren von A und die zugehörigen Eigenwerte λ_i sind reell. (*)

Korollar 5: Sei H ∞-dimensionaler, separabler Hilbertraum und $A: H \to H$ kompakt, symmetrisch und $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ONB aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten λ_i. Dann gilt: die Lösung von

$$(Id - A)x = b \quad , b \perp \operatorname{Ker}(Id - A)$$

ist gegeben durch

$$x = \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq 1}}^{\infty} \frac{\langle b, u_i \rangle}{1 - \lambda_i} u_i}_{=: x_0} + \operatorname{Ker}(Id - A)$$

Beweis: angenommen, die Reihe konvergiert, dann gilt

$$(Id - A)x_0 = \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq 1}}^{\infty} \frac{\langle b, u_i \rangle}{1 - \lambda_i} \underbrace{(Id - A)u_i}_{=(1-\lambda_i)u_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq 1}}^{\infty} \langle b, u_i \rangle u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle b, u_i \rangle u_i, \quad \text{da } b \perp \operatorname{Ker}(Id - A)$$

$$= b$$

Konvergenz der Reihe: $x_m := \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq 1}}^{m} \frac{\langle b, u_i \rangle}{1 - \lambda_i} u_i$. Für $n > m$:

$$\| x_m - x_n \|^2 = \sum_{\substack{i=m+1 \\ \lambda_i \neq 1}}^{n} \frac{|\langle b, u_i \rangle|^2}{(1-\lambda_i)^2}$$

Da 0 einziger HP von $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, folgt $\frac{1}{(1-\lambda_i)^2} \leq M \quad \forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i \neq 1$

$$\leq M \sum_{i=m+1}^{n} |\langle b, u_i \rangle|^2 < \varepsilon \text{ falls } n > m \geq n_0, \text{ wenn}$$

man bedenkt, daß $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle b, u_i\rangle|^2 = \|b\|^2$.

4.2. Eigenwertprobleme für elliptische Randwertaufgaben

Sei $L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij}(x)\partial_j) + c(x)$

gleichmäßig elliptisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$

<u>Beachte</u> wegen $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ ist $L = L^*$.

<u>Definition 7</u> (a) $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Dirichlet-Eigenwert von L, falls $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ existiert mit $\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$

u heißt Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ.

(b) $\mu \in \mathbb{R}$ heißt Neumann-Eigenwert von L, falls $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ existiert mit $\begin{cases} Lu = \mu u & \text{in } \Omega \\ \nu^T(x) A(x) \nabla u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

u heißt Eigenfunktion von L zum Eigenwert μ.

29.6.2015

<u>Satz 8</u> L besitzt abzählbar unendlich viele Dirichlet-Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$, $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty$ und Neumann-Eigenwerte $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le \dots$, $\lim_{k \to \infty} \mu_k = \infty$ sowie zugehörige Orthonormalbasen $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ bestehend aus (Dirichlet)-Eigenfunktionen φ_k zum Eigenwert λ_k bzw. (Neumann)-Eigenfunktionen