KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
29.10.2009

Analysis I

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 05.11.2009, 11.30 Uhr.

Aufgabe 5 (K)

Beweisen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}$,

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$,

e) 133 ist ein Teiler von $11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

f) $n \geq 6 \Rightarrow 3^n > 2n^3$.

Aufgabe 6

Sei M eine endliche nichtleere Menge. Zeigen Sie:

$$|\{A \in \mathcal{P}(M) \,:\, |A| \text{ ist gerade }\}| = 2^{|M|-1}.$$

(Hierbei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente von A, vgl. Lineare Algebra.)

Aufgabe 7 (K)

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$$

bijektiv ist.

b) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abzählbaren Mengen. Zeigen Sie, daß auch die Vereinigung

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

abzählbar ist.

c) Zeigen Sie, daß die Menge

$$M := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich }\}$$

abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen.

a) $x \leq 5 + \sqrt{x+7}$,

b) $\sqrt{x+1} + x \leq 5$.