KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
05.11.2009

Analysis I

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 12.11.2009, 11.30 Uhr.

Aufgabe 9 (K)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, daß auch $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Zeigen Sie, daß es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt mit $a_n \to \inf A$ für $n \to \infty$.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_0 := \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \to a_0 \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a_0 = 0$.

Aufgabe 10

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n := \sqrt{n^2+1} - n \quad (n \in \mathbb{N})$,

b) $a_n := \dfrac{(n-1)^3 - (n+2)^3}{4 + 3n^2 + 2n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

c) $a_n := (1 + (-1)^n)^n \quad (n \in \mathbb{N})$,

d) $a_n := \dfrac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 11

a) Sei $N \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, a_2, \ldots, a_N > 0$. Zeigen Sie, daß die durch

$$c_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} a_k^n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Zeigen Sie, daß die durch

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 12 (K)

(1) **a)** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0, a_1 := 1;\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Zeigen Sie, daß $a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

b) Setze $\lambda := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$b_0 := 0, b_1 := 1;\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Zeigen Sie, daß $b_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

(2) Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_1 := 1/2, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $a_1 := 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.