KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2009/10
INSTITUT FÜR ANALYSIS 12.11.2009
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

Analysis I

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 19.11.2009, 11.30 Uhr.

Aufgabe 13

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die gilt:

(i) $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren,

(ii) $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Zeigen Sie, daß dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie ferner, daß diese Konklusion falsch ist, wenn nur (i), aber nicht (ii) gefordert wird.

Aufgabe 14 (K)

Bestimmen Sie jeweils $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sowie alle Häufungswerte der im folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n := \sqrt[n]{n + (-1)^n \cdot n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

b) $a_n := (3 + (-1)^n)(-1)^{n(n+1)/2} \quad (n \in \mathbb{N})$,

c) $a_n := \left(\dfrac{n + (-1)^{n-1}}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$,

d) $a_n := 8^{-n}\left(12n^{-1} + \frac{6n+1}{n^3} + 8\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 15 (K)

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der Menge $H(a_n)$ der Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gebe ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k \to \alpha_0$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie, daß dann auch $\alpha_0 \in H(a_n)$ ist.

(2) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 16

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Die Folge $\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

b) Die Folge $\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$