KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
19.11.2009

Analysis I

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 26.11.2009, 11.30 Uhr.

Aufgabe 17

a) Sei $q \in [0,1)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. *(Hinweis: Cauchy-Kriterium)*

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ so, daß für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Ist dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

Aufgabe 18 (K)

Berechnen Sie für die zu den im folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörigen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jeweils die Folge der zugehörigen k-ten Teilsummen. Entscheiden Sie hieran, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe.

a) $a_n := \dfrac{1}{4n^2 - 1}$, **b)** $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$.

Aufgabe 19 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+n)}\right)$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\right)$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2}\right)$.

Aufgabe 20

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent,

(ii) Für jede Vorzeichenfolge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n a_n$ konvergent,

(iii) Es gibt eine unbeschränkte Folge $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ so, daß $\left\{ \displaystyle\sum_{n=1}^{N_j} |a_n| \;\middle|\; j \in \mathbb{N} \right\}$ beschränkt ist.