KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
26.11.2009

Analysis I

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 03.12.2009, 11.30 Uhr.

Aufgabe 21 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n!}{n^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{3/4}}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$ für $\alpha \geq 0$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Aufgabe 22

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_{>0})^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist $\inf\{na_n \,|\, n \in \mathbb{N}_{\geq k}\} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 23

In dieser Aufgabe verwenden wir, daß jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Darstellung als Dezimalzahl $a_p a_{p-1} \cdots a_1$ mit $p \in \mathbb{N}$ und Ziffern $a_1, ..., a_p \in \{0, 1, ..., 9\}$ mit $a_p \neq 0$ besitzt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls die Dezimaldarstellung von } n \text{ nicht die Ziffer 9 enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Hinweis: Schätzen Sie die Partialsummen über diejenigen n, deren Dezimaldarstellung dieselbe Länge besitzen, ab.

Aufgabe 24 (K)

a) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ mit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$, und berechnen Sie dessen Wert.

b) Definiere $a_0 := 0$ und $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, daß aber das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert. *(Hinweis: Zeigen Sie, daß die Reihenglieder des Cauchy-Produkts keine Nullfolge bilden.)* Warum läßt sich der Satz aus der Vorlesung über die Konvergenz des Cauchy-Produktes nicht anwenden?