KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
17.12.2009

Analysis I

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 07.01.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 33 (K)

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, und sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, daß f einen Fixpunkt besitzt, daß also ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = x$.

(2) Bleibt die Aussage in (1) wahr, wenn man das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch ein beliebiges Intervall ersetzt?

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, daß f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 34

Seien $a, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $a, \alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha}$,

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x^2} - 1}{x}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0+0} x^x$.

Aufgabe 35 (K)

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

- **a)** A abgeschlossen $\Rightarrow f(A)$ abgeschlossen,
- **b)** B abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen,
- **c)** A beschränkt $\Rightarrow f(A)$ beschränkt,
- **d)** B beschränkt $\Rightarrow f^{-1}(B)$ beschränkt.

(2) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

- **a)** Ist $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine Menge von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\bigcup\limits_{U \in \mathfrak{U}} U = M$, so ist f genau dann stetig, wenn $f|_U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ stetig ist.
- **b)** Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine endliche Menge von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A = M$, so ist f genau dann stetig, wenn $f|_A$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ stetig ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 36

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Dann ist M genau dann beschränkt und abgeschlossen, wenn jede stetige Funktion auf M beschränkt ist.

Wir wünschen frohe Festtage und einen guten Rutsch in das neue Jahr!

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 1) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den ÜBUNGSSCHEIN Analysis 1 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 13. Februar 2010.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung* (Analysis 1) für Studierende der *Physik*

- Studierende der PHYSIK können bereits im Anschluß an das erste Semester die Bachelor-Modulprüfung am Mittwoch, den 17. März 2010, 8-10 Uhr, für das Fach Analysis 1 ablegen. In diesem Fall ist eine Anmeldung über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) erforderlich. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für die Bachelor-Modulprüfung: 3. März 2010.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/