KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
07.01.2010

Analysis I

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 14.01.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 37 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto xe^{-nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, **b)** $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto nxe^{-nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto nx(1-x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

d) $f_n : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto nx(1-x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon \in (0, 1)$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2}$ für $x \in (0, 1)$, **f)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1 + x^4)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 38

Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie:

(1) Ist $\inf\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}, x \in [a, b]\} > 0$, so konvergiert $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

(2) Sind f und alle f_n, $n \in \mathbb{N}$, stetig und ist $g \in C(\mathbb{R})$, so konvergiert $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ (*Hinweis: stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Mengen sind gleichmäßig stetig*).

Aufgabe 39

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

a) $f(x) := \sqrt{x}$, **b)** $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 40 (K)

(1) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, daß $g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

(2) Zeigen Sie, daß die im folgenden definierten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$.

a) $f(x) := (x^2 + 1)e^{x^5}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, **b)** $f(x) := |x^2 - 4|^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

a) $f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} x^k \, e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 1) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den Übungsschein Analysis 1 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 13. Februar 2010.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung* (Analysis 1) für Studierende der *Physik*

- Studierende der Physik können bereits im Anschluß an das erste Semester die Bachelor-Modulprüfung am Mittwoch, den 17. März 2010, 8-10 Uhr, für das Fach Analysis 1 ablegen. In diesem Fall ist eine Anmeldung über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) erforderlich. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für die Bachelor-Modulprüfung: 3. März 2010.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/