KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
14.01.2010

Analysis I

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 21.01.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 41

Zeigen Sie für alle $y > x > 0$:

a) $e^{y^2} - e^{x^2} \leq (y-x)(x+y)e^{y^2}$,

b) $e^{1/x} - e^{1/y} \leq (y-x)\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$,

c) $y \log y - x \log x \leq (y-x)(1+\log y)$.

Aufgabe 42 (K)

(1) Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind mit $f(a) \leq g(a)$.

a) Ist $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt auch $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

b) Ist $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt auch $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b]$.

(2) **a)** Zeigen Sie $1 - \dfrac{1}{x} < \log(x) < x - 1$ für alle $x > 1$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) := \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+a}$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie: Ist $a \geq 1$, so ist f streng monoton fallend, ist hingegen $a \leq 0$, so ist f streng monoton wachsend.

Aufgabe 43 (K)

Untersuchen Sie jeweils, ob eine der Regeln von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}$.

Aufgabe 44

a) Zeigen Sie, daß die Cosinus-Funktion auf dem Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist und den Wertebereich $[-1,1]$ besitzt. Zeigen Sie weiter, daß die Umkehrfunktionarccos $:= \big(\cos|_{[0,\pi]}\big)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ differenzierbar auf $(-1,1)$ ist, und berechnen Sie die Ableitung.

b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ definiert man die Cotangens-Funktion durch

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \,.$$

Zeigen Sie, daß die Funktion cot auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend ist mit Wertebereich $\mathbb{R}$. Zeigen Sie weiter, daß die Umkehrfunktion arccot $:= \big(\cot|_{(0,\pi)}\big)^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

Anmeldung zur *Scheinklausur* (Analysis 1)

- Wenn Sie an der SCHEINKLAUSUR teilnehmen möchten, müssen Sie sich hierfür *unabhängig von der Anmeldung zum Übungsschein im QISPOS* bei Frau Basmer, Zimmer 3A-05.1 im Allianzgebäude anmelden. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für die Scheinklausur: 22. Januar 2010.

Weitere Informationen zur Scheinklausur finden Sie im ILIAS-System.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 1) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den ÜBUNGSSCHEIN Analysis 1 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 13. Februar 2010.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung* (Analysis 1) für Studierende der *Physik*

- Studierende der PHYSIK können bereits im Anschluß an das erste Semester die Bachelor-Modulprüfung am Mittwoch, den 17. März 2010, 8-10 Uhr, für das Fach Analysis 1 ablegen. In diesem Fall ist eine Anmeldung über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) erforderlich. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für die Bachelor-Modulprüfung: 3. März 2010.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/