

Analysis I

13. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 04.02.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 49 (K)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale direkt, indem Sie mit geeigneten Ober- und Untersummen das obere und untere Integral bestimmen:

$$\text{a) } \int_0^1 x^2 dx, \quad \text{b) } \int_0^1 e^x dx.$$

Aufgabe 50

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und integrierbar ist, und daß gilt:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = bf(b) - af(a).$$

Aufgabe 51 (K)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1([a, b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des Hauptsatzes, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_a^b \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx, & \text{b) } \int_a^b f'(x)f(x) dx, \\ \text{c) } \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx, \text{ sofern } 0 \notin f([a, b]), & \text{d) } \int_0^\pi (4x+5+\cos(x))e^{2x^2+5x+\sin(x)} dx. \end{array}$$

Aufgabe 52

a) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0, f(1) = 1$. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx \geq \frac{1}{e}$$

Hinweis: Betrachten Sie $e^x \cdot (f(\cdot)e^{-\cdot})'(x)$.

b) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und es gelte

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 f(x) dx = 1.$$

Zeigen Sie, daß ein $x_0 \in (0, 1)$ existiert mit $|f(x_0)| > 11$.

Hinweise: Beweis durch Widerspruch, berechnen Sie $\int_0^1 f(x)(x - \frac{1}{2})^2 dx$.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 1) für Studierende der *Mathematik und Informatik* (Bachelor)

- Für den ÜBUNGSSCHEIN Analysis 1 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 13. Februar 2010.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung* (Analysis 1) für Studierende der *Physik*

- Studierende der PHYSIK können bereits im Anschluß an das erste Semester die Bachelor-Modulprüfung am Mittwoch, den 17. März 2010, 8-10 Uhr, für das Fach Analysis 1 ablegen. In diesem Fall ist eine Anmeldung über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) erforderlich. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für die Bachelor-Modulprüfung: 3. März 2010.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>