KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2009/10
04.02.2010

Analysis I

14. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 11.02.2010, 11.30 Uhr.

Aufgabe 53 (K)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\log 10}} xe^{-x^2}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx,$

c) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\log x}{x}\,dx,$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin x\,dx,$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx,$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cos(2x)\,dx,$

g) $\displaystyle\int_1^{4} e^{\sqrt{x}}\,dx,$ **h)** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx.$

Aufgabe 54

Es sei $f \in C(\mathbb{R})$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$f_n(x) := n\int_0^{1/n} f(x+y)\,dy.$$

(1) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, daß f_n differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung f_n'.

(2) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jedem beschränkten und abgeschlossenem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 55 (K)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $f \in C(I)$ und $\xi \in I$. Definiere $f^{(0)} := f$ und rekursiv

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_\xi^x f^{(-n)}(x)\,dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, x \in I.$$

Zeigen Sie:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f^{(-n)} \in C^n(I)$ und $\left(f^{(-n)}\right)^{(n)} = f$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ gilt

$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_\xi^x (x-y)^{n-1} f(y)\,dy.$$

Aufgabe 56

(1) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe Riemannscher Summen.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{2n} \log\left(\dfrac{n+k}{n}\right)$, **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\sqrt[n^2]{3}\right)^{k^2}$.

(2) Untersuchen Sie jeweils, ob für die im folgenden durch $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definierte Funktionenfolge der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

existiert.

a) $f_n(x) := \dfrac{1}{n} e^{-nx^2}$, **b)** $f_n(x) := \dfrac{\sin(nx)}{1+nx}$.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 1) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den Übungsschein Analysis 1 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 13. Februar 2010.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung* (Analysis 1) für Studierende der *Physik*

- Studierende der Physik können bereits im Anschluß an das erste Semester die Bachelor-Modulprüfung am Mittwoch, den 17. März 2010, 8-10 Uhr, für das Fach Analysis 1 ablegen. In diesem Fall ist eine Anmeldung über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) erforderlich. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für die Bachelor-Modulprüfung: 3. März 2010.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/