Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

Analysis I

15. Übungsblatt

— keine Abgabe —

Aufgabe 57

Berechnen Sie jeweils das unbestimmte Integral:

a) $\displaystyle\int \frac{x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 5x - 4}{x^3 - 3x^2 + x - 3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{2 - 4x + 3x^2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 - x^4}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^4}\,dx$.

Aufgabe 58

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen, indem Sie die Berechnung durch geeignete Substitution auf die Berechnung von Stammfunktionen rationaler Funktionen zurückführen:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{\log^4 x - 1}{x(\log^3 x + 1)}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$.

Aufgabe 59

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}}{(2x-1)^2}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y}{\sinh y - y}\,dy$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \quad (s < 0,\ t \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 60

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\log(1+t)\,dt$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^4\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\cos(x^2)\,dx$

Aufgabe 61

a) Es sei $x > 0$. Zeigen Sie, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{und} \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

konvergieren und daß somit die Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, daß für alle $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

gilt, und folgern Sie

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 62

Welche der folgenden Funktionen sind von beschränkter Variation?

$$f : [0, 1/e] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x \log x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$h : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} (e^x - x - 1)\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Produktdarstellung von Polynomen

Jedes Polynom $q(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, besitzt eine Darstellung der Form

$$(Q) \quad q(x) = a_n (x-x_1)^{\varrho_1} \cdots (x-x_r)^{\varrho_r} \cdot (x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \cdots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}.$$

Dabei sind $\varrho_1, \ldots, \varrho_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\varrho_1 + \cdots + \varrho_r + 2\sigma_1 + \cdots + 2\sigma_s = n.$$

Die $x_1, \ldots, x_r$ sind die reellen Nullstellen von q, die Polynome $x^2 + A_j x + B_j$ besitzen keine reellen Nullstellen.

Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Es sei $r(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ eine echt gebrochene rationale Funktion, d. h. p und q sind Polynome, und der Grad von p ist kleiner als der Grad von q. Das Nennerpolynom habe die Darstellung (Q). Dann besitzt r eine Summendarstellung der Form

$$\begin{aligned} r(x) = & \frac{a_{11}}{x-x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots \frac{a_{1\varrho_1}}{(x-x_{\varrho_1})^{\varrho_1}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{a_{r1}}{x-x_r} + \frac{a_{r2}}{(x-x_r)^2} + \cdots \frac{a_{r\varrho_r}}{(x-x_r)^{\varrho_r}} \\ & + \frac{\alpha_{11}x + \beta_{11}}{x^2 + A_1 x + B_1} + \frac{\alpha_{12}x + \beta_{12}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{1\sigma_1}x + \beta_{1\sigma_1}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{\alpha_{s1}x + \beta_{s1}}{x^2 + A_s x + B_s} + \frac{\alpha_{s2}x + \beta_{s2}}{(x^2 + A_s x + B_s)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{s\sigma_s}x + \beta_{s\sigma_s}}{(x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}}, \end{aligned}$$

wobei die a_{jk}, $\alpha_{\nu\mu}$ und $\beta_{\nu\mu}$ reelle Zahlen sind.