KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
29.10.2010

Analysis I

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 5.11.2009, 13:00 Uhr.

Aufgabe 5 (K)

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Beziehungen gelten:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$, **d)** $c_n = 6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie: Es gilt $2^n > n^2$ für alle $n \geqslant 5$.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \text{ für } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Hinweis: Beachten Sie die Formel ("Pascalsches Dreieck"):

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $\displaystyle\frac{2x+3}{|4x-6|} > 2$ **b)** $|x+2| > |x-3|$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}\backslash\{b\}$, für die gilt:

c) $\displaystyle\frac{ax - a^2}{x - b} > b$.

Aufgabe 8 (K)

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$$

bijektiv ist.