KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
12.11.2010

Analysis I

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 19.11.2010, 13:00 Uhr.

Aufgabe 13

Es sei $a_1 > 0$ vorgegeben. Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie: a_n konvergiert gegen $\sqrt{2}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(a_n)_{n\geqslant 2}$ nach unten gegen $\sqrt{2}$ beschränkt und monoton fallend ist. Welche Identität können Sie aus der Rekursionsformel dann ablesen?

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+2n+2}$$

gegen 1 konvergiert, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 bestimmen, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Aufgabe 15 (K)

a) Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und die reelle Zahlenfolge $(a_n)_n$ konvergiere gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann auch $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

b) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und es sei

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie: Konvergiert b_n gegen ein $b \in \mathbb{R}$, so konvergiert s_n ebenfalls gegen b.

Aufgabe 16 (K)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

b) $b_n = \dfrac{7n^7(1+\frac{1}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2)(n^5+\sqrt{n+1})n^2}$

c) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$

d) $d_n = n^N \binom{2n}{n}^{-1}, \quad (N \in \mathbb{N})$