KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
INSTITUT FÜR ANALYSIS 26.11.2010
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

Analysis I

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 03.12.2010, 13:00 Uhr.

Aufgabe 21

Es seien $g, m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Es seien ferner $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant z_j < g \quad (j = 1, \ldots, n)$.

Zeigen Sie: besitzt eine Zahl $0 \leqslant a < 1$ die g-adische Darstellung der Form

$$a = 0, z_1 z_2 \ldots z_m \overline{z_{m+1} z_{m+2} \ldots z_n}$$

(der überstrichene Ziffernblock wiederholt sich periodisch), so gilt $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 22 (K)

Man zeige die folgenden Aussagen für die Reihen

$$\sinh(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

a) Die Reihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) $2\sinh(z) = \exp(z) - \exp(-z)$ und $2\cosh(z) = \exp(z) + \exp(-z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

c) $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 23 (K)

Umordnung absolut konvergenter Reihen

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Ferner sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und für $k \in \mathbb{N}$ seien $b_k = a_{\varphi(k)}$ die umgeordneten Reihenglieder.

Zeigen Sie: Dann ist auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

Aufgabe 24

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \log\left(\frac{1}{n}\right)$ für $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$ fest.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.