KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
03.12.2010

Analysis I

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 10.12.2010, 13:00 Uhr.

Aufgabe 25

a) Die Moivresche Formel
Zeigen Sie, dass $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Zeigen Sie die Formel $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.

Aufgabe 26 (K)

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ von

(i) $z = 1 + i$,

(ii) $z = \dfrac{3+2i}{1-i}$.

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

(i) $z = \sqrt{3}\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$,

(ii) $z = -4\exp\left(i\frac{5\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 27 (K)

Konvexe und konkave Funktionen
Es sei I ein Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt konvex, falls für alle $x, y \in I$ gilt:

$$\frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right) \geqslant f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right).$$

Sie heißt konkav, falls für alle $x, y \in I$ gilt:

$$\frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right) \leqslant f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right).$$

Zeigen Sie:

a) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ ist konkav.

b) $f : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ ist konvex.

Hinweis: Korollar 3.5 aus der Vorlesung:

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 28

Es sei $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_n x_n = 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_n x_n^{x_n} = 1.$$