

Analysis I

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 14.01.2011, 13:00 Uhr.

Aufgabe 37 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto nx(1-x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $f_n : [\varepsilon, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto nx(1-x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon \in (0, 1)$,

c) $f_N : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^N \frac{1}{nx - n^2}$ für $x \in (0, 1)$,

Aufgabe 38

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie:

(1) Ist $\inf\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}, x \in [a, b]\} > 0$, so konvergiert $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

(2) Sind f und alle f_n , $n \in \mathbb{N}$, stetig und ist $g \in C(\mathbb{R})$, so konvergiert $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ (*Hinweis: stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Mengen sind gleichmäßig stetig*).

Aufgabe 39 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

a) $f(x) := \sqrt{x}$,

b) $f(x) := \frac{1}{x}$.

Aufgabe 40

In dieser Aufgabe bezeichnen wir Funktionen der Form

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^N (m_n x + c_n) \chi_{I_n}(x)$$

als stückweise lineare Funktionen, wobei hier $(I_n)_{n=1}^N$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a, b]$ sei, und $m_n, c_n \in \mathbb{R}$.

Es sei nun $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

f ist genau dann stetig, wenn f gleichmäßiger Limes stückweiser linearer und stetiger Funktionen ist.

Hinweis zum Scheinkriterium:

Neben erfolgreicher Teilnahme bei den Tests ist zum Erhalt des Analysis-1-Scheins hinreichend:

- Im 1. Block: In den Übungsblättern 1-7 mindestens 10 von 14 Aufgaben mit mindestens einem Punkt gelöst, und
- im 2. Block: In den Übungsblättern 8,10-14 mindestens 9 von 12 Aufgaben mit mindestens einem Punkt gelöst.
- Die 2 K-Aufgaben des Übungsblattes 9 können als “Bonus”, entweder zum 1. oder zum 2. Block gerechnet werden.