

Analysis II

1. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 23.04.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 1

- a) Es sei n und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von paarweise orthogonalen Vektoren, d.h. $x \cdot y = 0$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie:

$$\left\| \sum_{x \in M} x \right\|^2 = \sum_{x \in M} \|x\|^2.$$

- b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Aufgabe 2

- (1) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$. Zeigen Sie:

a) Die „offene Kugel“ $U_\delta(x_0)$ ist offen,

b) die „abgeschlossene Kugel“ $\overline{U}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$ ist abgeschlossen, und es gilt $\overline{U}_\delta(x_0) = \overline{U_\delta(x_0)}$.

- (2) Zeigen Sie die fehlende Implikation Satz 2.2 (4) (iii) \Rightarrow (i): Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, daß K beschränkt und abgeschlossen ist.

(Hinweis zur Abgeschlossenheit: Für $x \notin K$ betrachten Sie die Mengen $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$.)

Aufgabe 3 (K)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Ist A offen, so ist $A + B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, b \in B : x = a + b\}$ offen.

b) Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist $A + B$ abgeschlossen.

c) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

d) Es ist $\overline{A + B} \supseteq \overline{A} + \overline{B}$, und ist eine der Mengen A, B kompakt, so gilt $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Aufgabe 4 (K)

- (1) Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : \|(x, y)\| \leq 42\}$,

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x \leq 3\}$,

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |x - y| \leq 1\}$.

- (2) Es sei $f \in C(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$ ist offen,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ ist abgeschlossen.

Übungsblatt

Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann im Allianzgebäude (3. Stock, gegenüber vom Fahrstuhl) abgeholt oder von

<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana22010s/>

bzw. im ILIAS (siehe unten) heruntergeladen werden. Die beiden **K**-Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden. Die bearbeiteten Aufgaben werden in die Abgabekästen im 3. Stock des Allianzgebäudes (vom Fahrstuhl geradeaus auf der linken Seite, neben Raum 3A-03) geworfen. Der späteste Abgabetermin ist dem jeweiligen Übungsblatt zu entnehmen. In der Regel ist dies um 14:00 Uhr am Freitag der folgenden Woche. Die Rückgabe der korrigierten Übungsblätter erfolgt in den Übungsgruppen.

Zugang zum Allianzgebäude

Bitte beachten Sie die besondere Zugangsregelung für das Allianzgebäude, Sie müssen hierfür einmalig Ihre FriCard am Kartengerät am Haupteingang freischalten lassen und erhalten ab dem nächsten Tag Zugang mithilfe der freigeschalteten FriCard.

Übungsschein

Auf jedem Übungsblatt finden sich zwei **K**-Aufgaben, die mit jeweils maximal 4 Punkten bewertet werden. Den Übungsschein erhält, wer in den Übungsblättern 1–6 sowie 7–12 jeweils mindestens 24 Punkte erreicht.

Damit der Übungsschein korrekt verbucht werden kann, müssen sich Bachelor-Studierende im Laufe des Semesters online für den Schein anmelden (unabhängig von der Anmeldung zum Tutorium). Nähere Informationen finden Sie im ILIAS (siehe unten).

Tutorien

Die Anmeldung zu den Tutorien erfolgt durch das System "WebInScribe". Einzelheiten entnehmen Sie bitte dem entsprechenden Merkblatt. Die Tutorien finden ab dem 19.04.2010 statt.

Literatur

Apostol, *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus*. 2nd ed., Addison-Wesley (1974).

Endl/Luh, *Analysis II*. 8. Auflage, AULA (1994).

Forster, *Analysis 2*. 8. Auflage, Vieweg-Verlag (2008).

Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. 14. Auflage, Teubner-Verlag (2008).

Königsberger, *Analysis 2*. 5. Auflage, Springer-Verlag (2009).

Rudin, *Analysis*. 4. Auflage, Oldenbourg-Verlag (2008).

Walter, *Analysis 2*. 5. Auflage, Springer-Verlag (2009).

Lernplattform ILIAS

Weitere Informationen, ergänzendes Material zur Vorlesung und Übung sowie ein Diskussionsforum finden Sie auf der Lernplattform ILIAS, zu der Sie über den folgenden Link gelangen:

<https://ilias.rz.uni-karlsruhe.de/>

Es wird dringend empfohlen, sich im ILIAS anzumelden, da dort sämtliche relevanten Informationen, z.B. zur Online-Anmeldung, zur Verfügung gestellt werden. Außerdem können über das ILIAS-System auch kurzfristige Terminänderungen per Rundmail bekannt gegeben werden. Um sich auf der Lernplattform anmelden zu können, benötigen Sie einen RZ-Account. Nähere Informationen zur Anmeldung auf ILIAS finden Sie unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana22010s/>