KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
23.04.2010

Analysis II

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 30.04.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 5 (K)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $A \subseteq D$ heißt *offen (abgeschlossen) in* D (auch *relativ offen (abgeschlossen) in* D), falls es eine offene (abgeschlossene) Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $A = D \cap B$.

(1) Sei $U \subseteq D$. Dann ist U genau dann offen in D, wenn zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $D \cap V \subseteq U$.

(2) Sei $A \subseteq D$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in D, wenn für jede in D konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$.

(3) Sei $A \subseteq D$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in D, wenn $D \backslash A$ offen in D ist.

(4) Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f ist stetig.

b) Für jede offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(W)$ offen in D.

c) Für jede abgeschlossene Menge $C \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in D.

Aufgabe 6

a) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Beweisen Sie, daß dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, aber f in $(0,0)$ unstetig ist.

b) Definiere

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } x^2 < y\,, \\ y/x^2 & \text{falls } 0 < y \leqslant x^2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion g ist auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und in $(0,0)$ unstetig. Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt dennoch $g(ta,tb) \to 0$ für $t \to 0$.

Aufgabe 7 (K)

(1) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, **b)** $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$.

(2) Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0,0)$ stetig?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Aufgabe 8

Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(0,0)$ stetig?