KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
30.04.2010

Analysis II

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 07.05.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 9

a) Setze $f(x,y) := \log\sqrt{x^2+y^2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

b) Sei $n \geq 3$ und $f(x) := \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 10 (K)

(1) **a)** Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt und untersuchen Sie sie auf Stetigkeit. Ist f im Ursprung differenzierbar?

b) Definiere

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & \text{falls } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Ursprung. Ist f dort differenzierbar?

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) := (1 + \|x\|)\, x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist und berechnen Sie in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ die Jacobi-Matrix $J_f(x)$.

Aufgabe 11 (K)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homogen vom Grad α, das heißt:

$$\forall\, t > 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \;:\; f(tx) = t^\alpha f(x).$$

(1) Die Funktion f sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$ gilt

a) $f'(x) \cdot x = \alpha\, f(x)$, **b)** $f'(tx) = t^{\alpha - 1}\, f'(x)$.

(2) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0. Zeigen Sie, daß die Funktion f linear ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f (bezüglich der Standardbasis). *(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $f(0) = 0$.)*

Aufgabe 12

Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\,, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0\,, & \text{falls } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.

b) Zeigen Sie, daß $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gilt, aber $f \notin C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.