KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
07.05.2010

Analysis II

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 14.05.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 13 (K)

(1) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Definiere

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f\big(h(xy), x \cdot g(y, x), y\big).$$

Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist, und stellen Sie die Ableitung F' mithilfe der Kettenregel als Komposition der (partiellen) Ableitungen von f, g und h dar.

(2) Definiere die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z) := xy + 2x^2, \quad g(x, y, z) := (1 + 3z, x^2 + z^2 + y, 4zy) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie jeweils $f', (f \circ g)', (g \circ g)'$ und $(g \circ g \circ g)'$ im Punkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 14

(1) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß f lokal Lipschitz-stetig ist, das heißt, zu jedem $x \in D$ findet man ein $\varepsilon > 0$ so, daß $f|_{D \cap U_\varepsilon}(x)$ Lipschitz-stetig ist.

(2) Setze $D := (0, 2)^2 \setminus [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $M := \sup\limits_{v \in D} \|f'(v)\| < \infty$. Zeigen Sie, daß für alle $v, w \in D$ gilt: $|f(v) - f(w)| \leq \sqrt{2} M \|v - w\|$.

Aufgabe 15 (K)

Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_2^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

a) Zeigen Sie, daß für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x)$ existiert, und berechnen Sie diese.

b) Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Zeigen Sie, daß $h := f \circ g$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.

c) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq 1$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{133}\, \|x - y\|.$$

Aufgabe 16

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne

$$(T_k f)((x,y);(x_0,y_0)) := \sum_{j=0}^{k} \frac{((x-x_0, y-y_0)\cdot\nabla)^{(j)} f(x_0,y_0)}{j!}$$

das k-te Taylorpolynom von f um (x_0, y_0).

a) Bestimmen Sie das 3. Taylorpolynom $(T_3 f)((x,y);(0,0))$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xe^{x+y}$.

b) Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom $(T_2 g)((x,y);(0,0))$ von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sin(xe^y)$. Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{g(x,y) - (T_2 g)((x,y);(0,0))}{\|(x,y)\|^3}$?