KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2010
INSTITUT FÜR ANALYSIS 14.05.2010
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

Analysis II

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 21.05.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 17

(1) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y^2 - 3x^2y + x^4$.

a) Zeigen Sie, daß f auf allen Ursprungsgeraden ein Minimum in $(0, 0)$ besitzt, das heißt: Für jedes $a \in \mathbb{R}^2$ besitzt die Funktion $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(ta)$ ein lokales Minimum in 0.

b) Besitzt die Funktion f in $(0, 0)$ ein lokales Minimum?

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv semidefinit*, falls $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion so, daß die Hesse-Matrix in jedem Punkt positiv semidefinit ist, und es gebe ein $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$. Zeigen Sie, daß x_0 eine globale Minimalstelle ist, also $f(x_0) = \min f(D)$, welche sogar strikt ist, falls zusätzlich $H_f(x_0)$ positiv definit ist. *(Hinweis: Reduzieren Sie das Problem auf $n = 1$, indem Sie Geraden durch x_0 betrachten.)*

(3) Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Definiere

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{m} \|x - a_k\|^2.$$

Zeigen Sie, daß g ein striktes globales Minimum besitzt, und berechnen Sie die Stelle, an der es angenommen wird.

Aufgabe 18 (K)

(1) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ für alle $(x, y) \in D := \mathbb{R}^2$,

b) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$ für alle $(x, y) \in D := \mathbb{R}^2$.

(2) Begründen Sie, warum die folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ Maximum und Minimum annehmen, und berechnen Sie diese.

a) $f(x, y) = x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2$ für alle $(x, y) \in D := [0, 5]^2$,

b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ für alle $(x, y) \in D := \overline{U}_{\sqrt{2}}((0, 0))$.

Hinweis zu (2) b): Sie können $\partial U_{\sqrt{2}}((0, 0)) = \{(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ verwenden.

Aufgabe 19

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, also $A^T = A$. Definiere

$$q : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x \cdot (Ax)}{\|x\|^2} = \frac{x^T Ax}{\|x\|^2}.$$

a) Zeigen Sie, daß q differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

b) Zeigen Sie, daß die stationären Punkte von q genau die Eigenvektoren von A sind und daß für jeden Eigenvektor x von A der zugehörige Eigenwert $q(x)$ ist.

c) Zeigen Sie mithilfe von a), daß A einen reellen Eigenwert besitzt.

Hinweis zu c): Zeigen Sie zunächst $q(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) = q(S)$ *mit* $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Aufgabe 20 (K)

a) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x + e^{-y},\ e^{x+y})$. Zeigen Sie: Es existiert eine offene Umgebung U des Punktes $(0, 0)$ und eine offene Umgebung V des Punktes $(2, 1)$ so, daß $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Berechnen Sie für die Umkehrfunktion $(f|_U)^{-1} : V \to U$ die Ableitung an der Stelle $(2, 1)$.

b) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto ((2 + \arctan x) \sin y,\ -e^x \cos y)$. Zeigen Sie, daß zu jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung U existiert so, daß $f|_U : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv?