KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
21.05.2010

Analysis II

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 28.05.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 21 (K)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} \cos x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0)$ in einer gewissen Umgebung U von $(0, 1)$ eine Funktion g mit $g(0, 1) = (1, 1)$ und

$$f\big(x_1, x_2, g(x_1, x_2)\big) = (0, 0) \qquad \text{für alle } (x_1, x_2) \in U$$

implizit definiert wird, und berechnen Sie die Ableitung $g'(0, 1)$.

b) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$z^5 + xz^3 - 2z^2 + xyz - xy^2 + 3 = 0$$

in einer Umgebung von $(0, 1, -1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $(x, y) \mapsto g(x, y)$ die Ableitung $g'(x, y)$ in Termen von $x, y, g(x, y)$ sowie explizit $g'(0, 1)$.

Aufgabe 22

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, daß die Menge $GL_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist und daß die Invertierungsabbildung $J : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}, X \mapsto X^{-1}$ differenzierbar ist, sowie die Ableitung J' zu bestimmen (hierbei fassen wir den Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ als $\mathbb{R}^d$ mit $d = n^2$ auf).

Definiere dazu $F : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, (X, Y) \mapsto XY$.

a) Zeigen Sie, daß F stetig differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $F'(X, Y)(A, B)$ sowie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial F}{\partial X}(X, Y)A$, $\dfrac{\partial F}{\partial Y}(X, Y)B$ für alle $X, Y, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(Hinweis: F ist bilinear)*.

b) Sei nun $X_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ fest. Zeigen Sie, daß eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ von X_0 und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ von X_0^{-1} sowie eine differenzierbare Abbildung $G : U \to V$ existieren mit $XG(X) = I$ für alle $X \in U$, und folgern Sie $U \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ und $G = J|_U$.

c) Zeigen Sie, daß J differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $J'(X)A$ für alle $X \in GL_n(\mathbb{R})$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 23 (K)

a) Zeigen Sie: $\max\{xyz \mid x, y, z > 0,\, x + y + z = 1\} = \frac{1}{27}$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema, das Minimum und das Maximum von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$$

auf der Menge $T = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$.

Aufgabe 24

Definiere

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 6\} \text{ und } B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 5\}.$$

Berechnen Sie den Abstand $d(A, B) := \inf\{\|a - b\| \mid a \in A,\, b \in B\}$ der Mengen A und B.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Existenz von $(a, b) \in A \times B$ mit $d(A, B) = \|a - b\|$, Multiplikatorenregel von Lagrange für die Funktion $f(u, v) := \|u - v\|^2, u, v \in \mathbb{R}^2$.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 2) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den Übungsschein Analysis 2 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 9. Juli 2010.

- Studierende, die *nicht* zu der oben genannten Gruppe gehören, müssen und können sich nicht für den Übungsschein anmelden. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 (Abschlußklausur)

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

- Studierende der Physik, Mathematik und Informatik, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- Diplomstudierende der Physik und Informatik sowie Studierende auf Lehramt melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- Diplommathematiker melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- Diplom-Wirtschaftsmathematiker melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- Diplom-Technomathematiker melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschuß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/