KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
28.05.2010

Analysis II

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 04.06.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 25 (K)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie:

a) Der Weg γ ist genau dann rektifizierbar, wenn es sein inverser Weg γ^- ist, und in diesem Fall gilt $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.

b) Ist der Weg γ rektifizierbar, so ist auch der Weg $\varphi \circ \gamma$ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\varphi \circ \gamma) \leq C\, L(\gamma)$$

mit $C := \sup\left\{ \frac{\|\varphi(x)-\varphi(y)\|}{\|x-y\|} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y \right\} < \infty$.

Aufgabe 26

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade stetige 2-periodische Funktion mit $g(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$ sowie $g(t) = 0$ für alle $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ und $g(t) = 1$ für alle $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ (warum existiert so ein g?). Definiere

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g\left(4^{2k+1}t\right)}{2^{k+1}}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g\left(4^{2k+2}t\right)}{2^{k+1}} \right).$$

Zeigen Sie, daß φ ein stetiger Weg ist mit $\varphi([0,1]) = [0,1]^2$. Ist φ rektifizierbar?

Hinweis: Zeigen Sie, daß $g\left(4^m \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{4^j}\right) = a_m$ ist für jede Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$, und verwenden Sie, daß jede Zahl in $[0,1)$ eine 2-adische Entwicklung besitzt.

Aufgabe 27 (K)

Berechnen Sie die Weglängenfunktion folgender Wege:

a) $\alpha : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, \cosh t)$,

b) $\beta : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$,

c) $\gamma : [0, 10] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$,

d) $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$.

Aufgabe 28

Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar. Dann heißt $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \varphi \mapsto f(\varphi)(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ der durch die Gleichung $r = f(\varphi), a \leq \varphi \leq b$ in Polarkoordinaten definierte Weg.

a) Zeigen Sie, daß γ rektifizierbar ist und daß für die Weglängenfunktion gilt:

$$s(\varphi) = \int_a^{\varphi} \sqrt{f(x)^2 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx \quad \text{für alle } \varphi \in I.$$

b) Es sei $R > 0$. Skizzieren Sie den durch die Gleichung $r = \varphi, 0 \leq \varphi \leq R$ in Polarkoordinaten definierten Weg und berechnen Sie die zugehörige Weglängenfunktion. *(Hinweis: Aufgabe 45 von Blatt 12 aus Analysis I).*

c) Skizzieren Sie den durch die Gleichung $r = 1 + \cos(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ in Polarkoordinaten definierten Weg und berechnen Sie die Weglänge.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 2) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den Übungsschein Analysis 2 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

  Anmeldeschuß für den Übungsschein: 9. Juli 2010.

- Studierende, die *nicht* zu der oben genannten Gruppe gehören, müssen und können sich nicht für den Übungsschein anmelden. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 (Abschlußklausur)

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

- Studierende der Physik, Mathematik und Informatik, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- Diplomstudierende der Physik und Informatik sowie Studierende auf Lehramt melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschuß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/