

Analysis II

8. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 11.06.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 29

Für einen glatten, zweimal stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$, der nach der Weglänge parametrisiert ist, heißt $\kappa_\gamma(s) := \|\gamma''(s)\|$ die *Krümmung von γ* im Punkt s für alle $s \in [0, L(\gamma)]$. Für einen beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Weg $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird die Krümmung an der Stelle t definiert als die Krümmung des nach Weglänge umparametrisierten Weges c an der Stelle $s(t)$, also $\kappa_\gamma(t) := \kappa_c(s(t))$.

- a) Es sei $r > 0$. Bestimmen Sie die Krümmung von $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (r \cos(t), r \sin(t))$.
- b) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glatter, zweimal stetig differenzierbarer Weg. Zeigen Sie, daß für alle $t \in I$ die Krümmung von γ im Punkt t gegeben ist durch:

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\| \|\gamma'(t)\|^2 \gamma''(t) - (\gamma''(t) \cdot \gamma'(t)) \gamma'(t) \|}{\|\gamma'(t)\|^4}.$$

Folgern Sie hieraus:

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} && \text{falls } n = 3, \\ \kappa_\gamma(t) &= \frac{|\gamma'_1(t)\gamma''_2(t) - \gamma'_2(t)\gamma''_1(t)|}{|\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2|^{3/2}} && \text{falls } n = 2. \end{aligned}$$

Hinweis: Für das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 können Sie die folgenden (bekanntesten?) Rechenregeln verwenden: $(u \cdot w)v - (u \cdot v)w = u \times (v \times w)$ und $u \perp v \Rightarrow \|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\|$ für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$; den Fall $n = 2$ können Sie auf den Fall $n = 3$ zurückführen, indem Sie den Weg $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$ betrachten.

Aufgabe 30 (K)

- a) Geben Sie für den Weg $\gamma : [0, \log 5] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \frac{1}{2}e^t(\cos t, \sin t, \sqrt{2})$ die Parameterdarstellung bezüglich der Weglänge an und berechnen Sie $\int_\gamma g(x, y, z) ds$ mit $g(x, y, z) := x$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- b) Es sei $r > 0$ und $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung $\tilde{\gamma}$ des Bogens Γ_γ mit der Weglänge als Parameter und das Wegintegral

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(x, y) \cdot d(x, y)$$

für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\arccos(\frac{x}{r}) + \frac{y}{r}, x + y)$.

Aufgabe 31

Bestimmen Sie für den Weg $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto ((1 + \cos(t)) \cos(t), (1 + \cos(t)) \sin(t))$ die Parameterdarstellung bezüglich der Weglänge und berechnen Sie $\int_{\gamma} x_1 ds, \int_{\gamma} x_1 dx_1$.

Aufgabe 32 (K)

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale $\int f(x) \cdot dx$ mit

a) $f(x, y) := (e^x, xy)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$,

b) $f(x, y, z) := (y, -z, x)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \gamma : [0, \log 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$,

c) $f(x, y) := (x^2y, -y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 1 \end{pmatrix}$,

d) $f(x, y) := (x^{42}y^{41}, \frac{-1}{1+xy^2})$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Anmeldung zum Übungsschein (Analysis 2) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den ÜBUNGSSCHEIN Analysis 2 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschuß für den Übungsschein: 9. Juli 2010.

- Studierende, die *nicht* zu der oben genannten Gruppe gehören, müssen und können sich nicht für den Übungsschein anmelden. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 (Abschlußklausur)*

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschuß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>