KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
11.06.2010

Analysis II

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 18.06.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 33 (K)

(1) Es sei $g \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(\frac{y}{x^2+y^2} + yg(xy),\ \frac{-x}{x^2+y^2} + xg(xy)\right) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Prüfen Sie, ob f in den folgenden Gebieten eine Stammfunktion besitzt, und geben Sie eine solche gegebenenfalls (unter Verwendung einer Stammfunktion von g) an:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2y\}$, **b)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2x\}$,
c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(2) Welche der folgenden Funktionen $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ besitzt eine Stammfunktion? Geben Sie eine solche gegebenenfalls an.

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (y^2 + 2z^3yx, 2y + z^3x^2, y^2 + 3z^2yx^2),$$
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (y^2 + 2zx, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz).$$

Aufgabe 34

Beweisen Sie die folgende Variante des Poincaré-Lemmas (vgl. auch Satz 14.5 aus der Vorlesung): Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmigs Gebiet, und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ erfülle die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad \text{für alle } k, j \in \mathbb{N}_{\leq n}.$$

Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Hinweis: Sie können o.B.d.A. annehmen, daß G bezüglich 0 sternförmig ist sowie $f(0) = 0$ und damit den Ansatz $F(x_0) := \int_{\gamma_{x_0}} f(x) \cdot dx$ mit $\gamma_{x_0}(t) = tx_0$ machen. Sie können außerdem ohne Beweis verwenden, daß das so definierte F differenzierbar ist und Sie die Ableitung mit dem Integral vertauschen können (vgl. auch Ergänzungen zur 9. Übung im ILIAS).

Aufgabe 35

Sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto g(\|x\|)x$. Zeigen Sie, daß f eine Stammfunktion besitzt. Berechnen Sie diese konkret für den Fall $g(t) = t^\alpha$ für alle $t \in (0,\infty)$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 36 (K)

(1) Skizzieren Sie die folgenden Mengen $B \subset \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie jeweils den Inhalt $|B|$.

a) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{1}{4}x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 2 - x \right\}$,

b) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geqslant 0\,, \; y^2 \leqslant x \leqslant 4 - y^2 \right\}$.

(2) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_B \cosh \frac{x}{y+1} \, d(x,y)\,, B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geqslant 0, \, y - x \geqslant -1, \, y^2 - x - 1 \leqslant 0 \right\}$,

b) $\displaystyle\int_B (y + x^2)\, d(x,y)\,,$ $\quad B$ ist das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,5)$, $(5,1)$.

(3) Die Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\int_B \sin z \, d(x,y,z)$.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 2) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den Übungsschein Analysis 2 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

  Anmeldeschuß für den Übungsschein: 9. Juli 2010.

- Studierende, die *nicht* zu der oben genannten Gruppe gehören, müssen und können sich nicht für den Übungsschein anmelden. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 (Abschlußklausur)

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

- Studierende der Physik, Mathematik und Informatik, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- Diplomstudierende der Physik und Informatik sowie Studierende auf Lehramt melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- Diplommathematiker melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- Diplom-Wirtschaftsmathematiker melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- Diplom-Technomathematiker melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschuß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/