

Analysis II

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 25.06.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 37 (K)

- (1) Untersuchen Sie die folgenden komplexen Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+i}{n-2in} \right)^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)(n+i+1)}$,

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-i\sqrt{k}}$.

- (2) Es sei $r \in [0, 1)$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r \cos(x)}{1 - 2r \cos(x) + r^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die komplexe Exponentialfunktion.

Aufgabe 38

- (1) Definiere $\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ für alle $f \in C^1([0, 1])$. Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm ist und $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum. Ist auch $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum?

- (2) Definiere

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_1$ eine Norm und $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 39

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Normen auf \mathbb{K}^n äquivalent, das heißt: Sind $\|\cdot\|$ und $\|\!\| \cdot \|\!\|$ zwei Normen auf \mathbb{K}^n , so gibt es Konstanten $c, C > 0$ mit:

$$\forall x \in X : c \|x\| \leq \|\!\|x\|\!\| \leq C \|x\|.$$

Mögliche Herangehensweise: Es reicht, eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{K}^n mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ zu vergleichen. Rechnen Sie dazu die Abschätzung $\|x\| \leq C \|x\|_2$ „von Hand“ nach, und verwenden Sie anschließend die Stetigkeit der lineare Abbildung $J : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$, $x \mapsto x$ sowie die Kompaktheit der Einheitskugel in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

Aufgabe 40 (K)

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Zeigen Sie, daß die Abbildung $F : X \rightarrow X, x \mapsto x + f(x)$ bijektiv ist und daß F und F^{-1} Lipschitz-stetig sind, daß also Konstanten $m, M > 0$ existieren mit $\|F(x) - F(y)\| \leq m \|x - y\|$ und $\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\| \leq M \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$.

Hinweis: Betrachten Sie für festes $z \in X$ die Abbildung $g_z : X \rightarrow X, x \mapsto z - f(x)$, und wenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz an.

Anmeldung zum *Übungsschein (Analysis 2)* für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- Für den ÜBUNGSSCHEIN Analysis 2 können sich Studierende der Mathematik oder Informatik auf Bachelor (nicht Lehramt) ab sofort über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) anmelden. Die Anmeldung über das QISPOS-System ist aus verwaltungstechnischen Gründen in jedem Fall notwendig und führt zu keinerlei Nachteilen, falls der Übungsschein nicht erlangt werden sollte. Beachten Sie hierfür bitte den

Anmeldeschluß für den Übungsschein: 9. Juli 2010.

- Studierende, die *nicht* zu der oben genannten Gruppe gehören, müssen und können sich nicht für den Übungsschein anmelden. Im Falle des Erlangens wird der Übungsschein im Anschluß an die Vorlesungszeit in Papierform ausgestellt.

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 (Abschlußklausur)*

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

- Studierende der PHYSIK, MATHEMATIK UND INFORMATIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- DIPLOMSTUDIERENDE der PHYSIK UND INFORMATIK sowie STUDIERENDE AUF LEHRAMT melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).
- DIPLOMMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4B-01 (Allianzgebäude) bei Dr. Kühnlein,
- DIPLOM-WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 3C-08 (Allianzgebäude) bei Dr. Neher,
- DIPLOM-TECHNOMATHEMATIKER melden sich an in Zimmer 4C-21 (Allianzgebäude) bei Dr. Hettlich.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG/ZWISCHENPRÜFUNG/DIPLOMVORPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 finden Sie auch unter

<http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de>

Link zum QISPOS: <https://studium.kit.edu/>