KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2010
INSTITUT FÜR ANALYSIS 02.07.2010
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

Analysis II

12. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 09.07.2010, 14.00 Uhr.

Aufgabe 45 („ungewöhnliche“ Differentialgleichungen)

a) Zeigen Sie, daß die folgende Differentialgleichung

$$y' = y \circ y, \quad y(0) = 1/4$$

auf $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ besitzt, welche unter der Zusatzforderung $|y(x)|, |y'(x)| \le \frac{1}{2}$ für alle $x \in I$ sogar eindeutig ist.

Hinweis: Wenden Sie den Fixpunktsatz von Banach auf eine geeignete Selbstabbildung der abgeschlossenen Teilmenge $A := \left\{ y \in C^1(I) \;\middle|\; \|y\|_\infty, \|y'\|_\infty \le \frac{1}{2} \right\}$ *des Banachraums* $C^1(I)$, *ausgestattet mit der Norm* $\|\cdot\|_{C^1} : X \to \mathbb{R}, y \mapsto \|y\|_\infty + \frac{1}{12}\|y'\|_\infty$ *(vgl. Aufgabe 38 (1)) an.*

b) Zeigen Sie, daß die folgende Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x-1) \quad \text{auf } [0,1]$$

unendlich viele Lösungen $y : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$ besitzt, und geben Sie zwei solche Lösungen explizit an.

Handelt es sich bei den Gleichungen in a) und b) um gewöhnliche Differentialgleichungen?

Aufgabe 46 (K)

Zeigen Sie, daß die Integralgleichung

$$y(x) = x \int_0^x t y(t)\, dt + 1$$

genau eine Lösung $y \in C([0,1], \mathbb{R})$ besitzt. Zeigen Sie ferner, daß diese Lösung y sogar C^∞ ist und sich als Potenzreihe darstellen läßt, und berechnen Sie die Potenzreihendarstellung von y.
Hinweis: Man wende den Fixpunktsatz von Banach auf eine geeignete Abbildung T *auf dem Banachraum* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ *an.*

Aufgabe 47

Definiere

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \sin^2(xy) \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{falls } (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{falls } (x,y) \in [0,1] \times \{0\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \; y(0) = c$$

für jeden Anfangswert $c \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung auf $[0,1]$ besitzt.

Aufgabe 48 (K)

Definiere

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} 2\left(x - \frac{y}{\sqrt{|y|}}\right) & \text{falls } (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2x & \text{falls } (x,y) \in [0,1] \times \{0\}. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, daß f stetig ist.

b) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \;\; y(0) = 0$$

auf $[0,1]$, indem Sie den Ansatz $y(x) = \alpha x^2$ mit $\alpha > 0$ machen.

c) Zeigen Sie, daß die Folge der sukzessiven Approximationen zum Anfangswertproblem aus Teil b), ausgehend von $y_0(x) := 0$ für alle $x \in [0,1]$, in keinem Punkt $x \in (0,1]$ konvergiert.

d) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem aus Teil b) auf $[0,1]$ eindeutig lösbar ist.

Hinweis zu d): Verwenden Sie Aufgabe 42.

Anmeldung zum *Übungsschein* (Analysis 2) für Studierende der *Mathematik und Informatik (Bachelor)*

- **Anmeldeschluß für den Übungsschein: 9. Juli 2010.**

Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 (Abschlußklausur)

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

Anmeldeschluß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

Link zum QISPOS: https://studium.kit.edu/