KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2010
09.07.2010

# Analysis II

## 13. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 16.07.2010, 14.00 Uhr.

### Aufgabe 49

In dieser Aufgabe behandeln wir die Matrix-Exponentialfunktion. Wir arbeiten dazu mit Reihen und Potenzreihen im Banachraum (da endlich-dimensional) $X := \mathbb{R}^{n\times n}$, ausgestattet mit der Matrixnorm $\|\cdot\|$. Ähnlich wie in §16 gelten Konvergenzkriterien für Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ sowie Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k A_k$ $(x\in\mathbb{R})$, die nicht auf der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ beruhen, auch für $A_k \in X$.

(1) Seien $A, B \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- **a)** Die Reihe $e^A := \exp(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ konvergiert absolut (also $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|A^k\| < \infty$),
- **b)** ist $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A\, e^B$,
- **c)** es ist $e^{\lambda E} = e^{\lambda} E$, und $e^A$ ist invertierbar mit $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$,
- **d)** ist $S \in GL_n(\mathbb{R})$, so gilt $S^{-1}e^A S = e^{S^{-1}AS}$,
- **e)** die Funktion $Y : \mathbb{R} \to X, x \mapsto \exp(xA)$ ist stetig differenzierbar mit $Y'(x) = A\exp(xA) = \exp(xA)A$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, daß $Y$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ ist.

(2) Seien $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $e^{xA}$ für die folgenden Matrizen $A$:

- **a)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- **c)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$,
- **d)** $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}$.

### Aufgabe 50

Es sei $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig mit $S(0) = E$ und $S(x+y) = S(x)S(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $S(x) = \exp(xA)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

*Hinweis: Zeigen Sie* $(S(y)-E)\displaystyle\int_0^h S(x)\,dx = (S(h)-E)\int_0^y S(x)\,dx$ *für alle* $y, h \in \mathbb{R}$ *und daß* $\displaystyle\frac{1}{h}\int_0^h S(x)\,dx$ *für hinreichend kleines* $|h|$ *invertierbar ist, da* $GL_n(\mathbb{R})$ *offen ist; Folgern Sie hieraus, daß* $S$ *stetig differenzierbar ist und wählen Sie* $A := S'(0)$.

**Aufgabe 51 (K)**

(1) Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem zu folgenden Differentialgleichungen:

**a)** $y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} y,$ **b)** $y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} y.$

(2) Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem zu den folgenden Systemen von Differentialgleichungen in den Funktionen $u, v$:

**a)** $\begin{array}{rcl} u' & = & v \\ v' & = & u \end{array},$ **b)** $\begin{array}{rcl} u' & = & -v \\ v' & = & u \end{array}.$

**Aufgabe 52 (K)**

Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem zu folgenden Differentialgleichungen:

**a)** $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y,$ **b)** $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} y.$

---

# ACHTUNG: Anmeldeschluß für den Übungsschein: Heute (Freitag), 9. Juli 2010!

### Anmeldung zur *Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung* Analysis 1/2 (Abschlußklausur)

Die Abschlußklausur zur Analysis 1/2 (Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung) findet statt am

**Mittwoch, den 15. September 2010, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).**

- Studierende der Physik, Mathematik und Informatik, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.
- Diplomstudierende der Physik und Informatik sowie Studierende auf Lehramt melden sich in Zimmer 3A-26.1 (Allianzgebäude) bei Frau Ewald an (dazu ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen).

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

**Anmeldeschluß für die Abschlußklausur (Analysis 1/2): 30. Juli 2010.**

Alle Informationen zur Bachelor-Modulprüfung/Zwischenprüfung/Diplomvorprüfung Analysis 1/2 finden Sie auch unter

http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de

**Link zum QISPOS:** https://studium.kit.edu/

---

Wir laden ein zum traditionellen

**S O M M E R F E S T**

der Fakultät für Mathematik. Es findet am letzten Tag der Vorlesungszeit statt, also am

## Freitag, dem 16. Juli 2010, auf dem Gelände des Sportinstituts.

**Alle Mitglieder der Fakultät für Mathematik sind herzlich dazu eingeladen, Gäste sind willkommen.**

Den Auftakt bildet ein Fußballspiel zwischen Dozenten und Studierenden auf dem Rasenplatz des Sportinstituts.

## Anstoß des Fußballspiels: 18.00 Uhr.

Studierende, die am Fußballspiel teilnehmen möchten, sollten sich bei der Fachschaft Mathematik melden. Nach dem Spiel können wir am Tennishaus grillen und feiern. Getränke und Brot werden wieder bereit gestellt, aber Grillgut (Würstchen, Steaks, ...) soll sich jeder **selbst mitbringen**. Begleitet wird das abendliche Fest von einem **musikalischen Programm** unter der bewährten Leitung von Prof. Henze.

Wir hoffen wieder auf rege Beteiligung, gutes Wetter und ein fröhliches Fest.