Lösungsvorschläge zur 1. Übung Analysis II

Aufgabe 1 • Die Menge aller reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ ist ein VR mit punktweiser Addition und S-Multiplikation. $C^1[0,1]$ ist ein VR als Unter-VR davon, da für $f,g \in C^1[0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, nach Ana I, $f+g \in C^1[0,1]$ und $\lambda f \in C^1[0,1]$ gilt.

• $\|\cdot\|_{C^1}$ ist Norm auf $C^1[0,1]$: Prüfe (N1)-(N3) für $f,g \in C^1[0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N1) $\|f\|_{C^1} = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f = 0.$

$f = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = \|f'\|_\infty = 0 \Rightarrow \|f\|_{C^1} = 0.$

(N2) $\|\lambda f\|_{C^1} = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$

$= |\lambda| \, \|f\|_{C^1}.$

(N3) $\|f+g\|_{C^1} = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$

$= \|f\|_{C^1} + \|g\|_{C^1}.$

• $\|\cdot\|^*_{C^1}$ ist Norm auf $C^1[0,1]$: Seien $f,g \in C^1[0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N1) $\|f\|^*_{C^1} = 0 \Rightarrow f(0) = 0,\ f' = 0 \Rightarrow f = 0$

$f = 0 \Rightarrow |f(0)| = \|f'\|_\infty = 0 \Rightarrow \|f\|^*_{C^1} = 0$

(N2) $\|\lambda f\|^*_{C^1} = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| (|f(0)| + \|f'\|_\infty)$

$= |\lambda| \, \|f\|^*_{C^1}$

(N3) $\|f+g\|^*_{C^1} = |f(0) + g(0)| + \|f'+g'\|_\infty \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$

$= \|f\|^*_{C^1} + \|g\|^*_{C^1}.$

• Äquivalenz der Normen: Aus $|f(0)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$ folgt $\|f\|^*_{C^1} \leq \|f\|_{C^1}$. Aus Hauptsatz folgt für $x \in [0,1]$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Anwendung des Betrages auf diese Gleichung:

$$|f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt$$

$$\leq |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \int_0^x 1\,dt \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1}^*.$$

Da die rechte Seite unabhängig von $x \in [0,1]$ ist, folgt

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \|f\|_{C^1}^*.$$

Insgesamt also $\|f\|_{C^1} \leq \|f\|_{C^1}^* + \|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_{C^1}^*$.

Die Äquivalenz folgt damit aus $\frac{1}{2}\|f\|_{C^1}^* \leq \|f\|_{C^1} \leq 2\|f\|_{C^1}^*$.

Aufgabe 2 a) Für $j \in \mathbb{N}$ gilt:

- $|x_j|_1 = \frac{1}{j} + e^{-j} + 2$, $|x_j|_2 = \sqrt{\frac{1}{j^2} + e^{-2j} + 4}$, $|x_j|_\infty = 2$
- $|y_j|_1 = |\sin j| + |\cos j| + 1$, $|y_j| = \sqrt{(\sin j)^2 + (\cos j)^2 + 1} = \sqrt{2}$, $|y_j|_\infty = 1$.

Nach 1.5 und 1.6 ist Konvergenz bzgl. $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ und $|\cdot|_\infty$ jeweils äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz der Folge. Damit gilt

- $\lim_{j\to\infty} x_j = \left(\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j}, \lim_{j\to\infty} e^{-j}, \lim_{j\to\infty} 2\right) = (0,0,2)$

  bzgl $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ und $|\cdot|_\infty$;

- $(y_j)_j$ konvergiert bzgl. keiner der Normen, da die Komponentenfolgen $(\sin j)_j$ und $(\cos j)_j$ nicht konvergieren.

b) Für $j \in \mathbb{N}$ gilt:

- $\|f_j\|_1 = \int_0^1 |x^j|\,dx = \int_0^1 x^j\,dx = \frac{1}{j+1} x^{j+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{j+1}$
- $\|f_j\|_2 = \left(\int_0^1 x^{2j}\,dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}$
- $\|f_j\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} x^j = 1$.

Bzgl. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ konvergiert $(f_j)_j$ gegen $f=0$, da

$$\|0-f_j\|_1 = \|f_j\|_1 = \frac{1}{j+1} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

$$\|0-f_j\|_2 = \|f_j\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

<u>Beh:</u> $(f_j)_j$ konvergiert <u>nicht</u> bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ in $C[0,1]$.

<u>Bew:</u> Ang. $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$, d.h. $(f_j)_j$ konvergiert gleichmäßig gegen ein $f\in C[0,1]$. Dann kvgt $(f_j)_j$ auch punktweise gegen f. Da aber $(f_j)_j$ punktweise gegen $g(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1), \\ 1, & x=1, \end{cases}$ konvergiert, müsste dann $f=g$ gelten, also $f\notin C[0,1]$. Widerspruch. ∎

Vergleiche hierzu auch 1.8 und 1.10!

<u>Aufgabe 3</u>

(I) <u>Beh:</u> $\mathring{A} = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1>0,\ x_2<0,\ x_3>0\}$

<u>Bew:</u> <u>"$\subseteq$"</u>: Sei $x\in\mathring{A}$, d.h. $\exists\,\varepsilon>0$ mit $B(x,\varepsilon)\subset A$.

<u>Angenommen $x_1\le 0$.</u> Dann $(x_1-\varepsilon/2, x_2, x_3)\in B(x,\varepsilon)$, da

$$|(x_1,x_2,x_3)-(x_1-\varepsilon/2,x_2,x_3)|_2 = |(-\varepsilon/2,0,0)|_2 = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Aber: $(x_1-\varepsilon/2,x_2,x_3)\notin A$, da $x_1-\varepsilon/2 \le -\varepsilon/2 < 0$. ↯ Also $x_1>0$.

<u>Ang</u> $x_2\ge 0$. Wie eben gilt dann $(x_1, x_2+\varepsilon/2, x_3)\in B(x,\varepsilon)$, aber $(x_1,x_2+\varepsilon/2,x_3)\notin A$ wegen $x_2+\varepsilon/2\ge \varepsilon/2>0$. ↯ Also $x_2<0$.

<u>Ang</u> $x_3\le 0$. Es gilt $(x_1,x_2,x_3-\varepsilon/2)\in B(x,\varepsilon)$, aber $(x_1,x_2,x_3-\varepsilon/2)\notin A$ ↯ Also $x_3>0$.

<u>"$\supseteq$"</u>: Sei $x\in\mathbb{R}^3$ mit $x_1>0$, $x_2<0$, $x_3>0$. Setze

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x_1}{2}, \frac{-x_2}{2}, \frac{x_3}{2}\right\}.$$

Beh: Mit diesem ε gilt $B(x,\varepsilon) \subset A$.

Bew: Sei $y \in B(x,\varepsilon)$. Dann

$$y_1 = y_1 - x_1 + x_1 \geq -|y_1 - x_1| + x_1 \geq -|y-x|_2 + x_1$$
$$> -\varepsilon + x_1 \geq -\frac{x_1}{2} + x_1 = \frac{x_1}{2} > 0.$$

ferner gilt

$$y_2 = y_2 - x_2 + x_2 \leq |y-x|_2 + x_2 < -\frac{x_2}{2} + x_2 = \frac{x_2}{2} < 0,$$

$$y_3 = y_3 - x_3 + x_3 \geq -|y-x|_2 + x_3 > -\frac{x_3}{2} + x_3 > 0,$$

insgesamt also $y \in A$.

Damit $x \in \mathring{A}$. Da x beliebig war, folgt "$\supseteq$". $\blacksquare$

(II) Beh: $\overline{A} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0\}$.

Bew: "$\subseteq$": Sei $x \in \overline{A}$, d.h. es gibt $(x_j)_j \subset A$ mit $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ bzgl. $|\cdot|_2$.

Nach Satz 1.5 heißt das $x_{1j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_1$, $x_{2j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_2$, $x_{3j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_3$ für die Komponentenfolgen. Da $x_{1j} > 0$, $x_{2j} < 0$ und $x_{3j} \geq 0$ für alle j, folgt aus den Gesetzen für den Limes in $\mathbb{R}$ dass $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, $x_3 \geq 0$.

"$\supseteq$": Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1 \geq 0$; $x_2 \leq 0$, $x_3 \geq 0$. Setze

$$x_{1j} = x_1 + \tfrac{1}{j},\quad x_{2j} = x_2 - \tfrac{1}{j},\quad x_{3j} = x_3 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) \in A$, und die Folge $(x_j)_j$ konvergiert gegen x für $j \to \infty$ (nach Satz 1.5). Also $x \in \overline{A}$ $\blacksquare$

(III) Beh: $\partial A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0$ und $x_2 \leq 0$ und $x_3 \geq 0$, oder
$x_1 \geq 0$ und $x_2 = 0$ und $x_3 \geq 0$, oder
$x_1 \geq 0$ und $x_2 \leq 0$ und $x_3 = 0\}$.

Bew: Laut Prop. 2.6 gilt $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Die Behauptung folgt also aus (I) und (II). $\blacksquare$

Aufgabe 4

a) Es gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

"$\subseteq$": $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \exists (x_j)_j \subset A \cup B$ mit $x_j \xrightarrow{j\to\infty} x$. Eine Teilfolge $(x_{j_l})_l$ von (x_j) muss ganz in A oder B liegen (sonst hätte die Folge nur endlich viele Elemente ↯). Da auch $x_{j_l} \xrightarrow{l\to\infty} x$, folgt $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

"$\supseteq$": $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \exists (x_j)_j \subset A$ oder $(y_j)_j \subset B$ mit $x_j \xrightarrow{j\to\infty} x$. Da auch $(x_j)_j \subset A \cup B$ und $(y_j)_j \subset A \cup B$, folgt $x \in \overline{A \cup B}$.

b) Es gilt $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, die Umkehrung ist i.a. falsch.

"$\subseteq$": $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow \exists (x_j)_j \subset A \cap B$ mit $x_j \xrightarrow{j\to\infty} x$

$\Rightarrow (x_j)_j \subset A, (x_j)_j \subset B, x_j \to x \Rightarrow x \in \overline{A}, x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Gegenbsp zu "$\supseteq$": $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, aber $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

c) Es gilt $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, die Umkehrung ist i.a. falsch.

"$\subseteq$": $x \in A^\circ \cup B^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset A$ oder $B(x,\varepsilon) \subset B$

$\Rightarrow B(x,\varepsilon) \subseteq A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^\circ$.

Gegenbsp zu "$\supseteq$" $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann $A^\circ = B^\circ = \emptyset$, aber $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$.

d) Es gilt $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

"$\subseteq$": $x \in (A \cap B)^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset A \cap B$, d.h. $B(x,\varepsilon) \subset A$ und $B(x,\varepsilon) \subset B$, also $x \in \mathring{A}$ und $x \in B^\circ$, also $x \in A^\circ \cap B^\circ$.

"$\supseteq$": $x \in A^\circ \cap B^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $B(x,\varepsilon_1) \subset A$, $B(x,\varepsilon_2) \subset B$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ dann $B(x,\varepsilon) \subset A \cap B$, also $x \in (A \cap B)^\circ$.