1. Übungsblatt zur Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Donnerstag, 21. April 2011, 12 Uhr

Aufgabe 1 (K): Man zeige, dass

$$C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [0,1]\}$$

mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist, und dass

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad \|f\|_{C^1}^* = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

jeweils Normen auf $C^1[0,1]$ definieren. Man zeige ferner, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ und $\|\cdot\|_{C^1}^*$ äquivalent sind.

Aufgabe 2:

a) Die Folgen $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$x_j = (1/j, e^{-j}, 2), \qquad y_j = (\sin j, -1, \cos j).$$

Man berechne für alle $j \in \mathbb{N}$ und $p \in \{1, 2, \infty\}$ die Werte $|x_j|_p$ und $|y_j|_p$. Konvergieren die Folgen jeweils bezüglich $|\cdot|_p$?

b) Die Funktionenfolge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$f_j : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_j(x) = x^j.$$

Für alle $j \in \mathbb{N}$ und $p \in \{1, 2, \infty\}$ berechne man $\|f_j\|_p$. Konvergiert die Folge jeweils in $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$?

Aufgabe 3: Man bestimme das Innere, den Abschluss und den Rand der Menge

$$A = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_3 \geq 0\big\}$$

bezüglich der euklidischen Norm $|\cdot|_2$.

Aufgabe 4 (K): Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A, B \subset X$. Beweise oder widerlege:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

c) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$,

d) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.