Lösungsvorschläge zur 2. Übung Analysis II

Aufgabe 5

a) • $\mathring{M}_1 = \emptyset$: zu $\varepsilon > 0$ und $x = \frac{1}{m} \in M_1$ gilt $B(x,\varepsilon) = (\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon) \not\subset M_1$, da z.B. in jedem nichttrivialen Intervall irrationale Zahlen enthalten sind, M_1 aber nur rationale enthält.

• $\overline{M_1} = M_1 \cup \{0\}$: Es sei $(x_j)_j$ aus M mit $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$. Dann gilt $x_j = \frac{1}{m_j}$ mit $m_j \in \mathbb{N}$.

Fall 1 $(x_j)_j$ hat nur endlich viele verschiedene Folgenglieder. Dann muss eines davon mit x übereinstimmen, also $x \in M_1$.

Fall 2 $(x_j)_j$ hat unendlich viele verschiedene Folgenglieder. Dann gibt es eine Teilfolge $\left(\frac{1}{m_{j_\ell}}\right)_\ell$ mit $m_{j_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \infty$, d.h. $(x_{j_\ell})_\ell$ konvergiert gegen $y = 0$. Da bei einer konvergenten Folge alle Teilfolgen auch gegen den Grenzwert konvergieren, folgt $x = 0$.

• $\partial M_1 = M_1 \cup \{0\}$: Dies folgt aus $\partial M_1 = \overline{M_1} \setminus \mathring{M}_1$ (Prop. 2.6 bzw. Aufg. 6)

b) • $\mathring{M}_2 = \emptyset$: Seien $(q,n) \in M_2$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Dann gilt $(q, n + \varepsilon/2) \in B((q,n),\varepsilon)$, da $|(q,n) - (q, n+\frac{\varepsilon}{2})|_2 = \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Andererseits $(q, n+\frac{\varepsilon}{2}) \notin M_2$, da $n + \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathbb{N}$.

Für kein $(q,n) \in M_2$ und kein $\varepsilon > 0$ gilt also $B((q,n),\varepsilon) \subset M_2$, d.h. $\mathring{M}_2 = \emptyset$.

• $\overline{M_2} = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$: "$\subseteq$": Sei $(x_1,x_2) \in \overline{M_2}$, d.h. $\exists\, (q_j, n_j)_j \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ mit $q_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x_1$ und $n_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x_2$. Dann $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{N}$, also $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$.

"$\supseteq$": Sei $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Dann gibt es $(q_j)_j \subset \mathbb{Q}$ mit $q_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$. Also konvergiert $(q_j, n)_j$ gegen (x,n) für $j \to \infty$, d.h. $(x,n) \in \overline{M_2}$.

• $\partial M_2 = \mathbb{R}\times\mathbb{N}$: Dies folgt wieder aus $\partial M_2 = \overline{M_2} \setminus \mathring{M}_2$.

Aufgabe 6

(I) $\overline{A} \subseteq \mathring{A} \cup \partial A$: Sei $x \in \overline{A}$ und $x \notin \mathring{A}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt dann $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, da es (wegen $x \in \overline{A}$) ein $x_\varepsilon \in A$ gibt mit $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Ferner gilt $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$, da sonst $B(x,\varepsilon) \subset A$, was $x \in \mathring{A}$ bedeuten würde. Fazit: Für $x \in \overline{A}$ gilt entweder $x \in \mathring{A}$ oder $x \in \partial A$, **d.h.** $\overline{A} \subseteq \mathring{A} \cup \partial A$.

(II) $\mathring{A} \cup \partial A \subseteq \overline{A}$: $\mathring{A} \subseteq \overline{A}$ folgt aus $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Sei $x \in \partial A$. Für $j \in \mathbb{N}$ gilt dann $B(x, 1/j) \cap A \neq \emptyset$, d.h. es gibt $x_j \in A$ mit $\|x - x_j\| < 1/j$. Also $x_j \xrightarrow[j \to \infty]{} x$, d.h. $x \in \overline{A}$.

(III) $\partial A \subseteq \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$: Sei $x \in \partial A$. Aus (II) folgt $x \in \overline{A}$. Da auch $B(x, 1/j) \cap X \setminus A \neq \emptyset$ für $j \in \mathbb{N}$ folgt wie in (II): $x \in \overline{X \setminus A}$.

(IV) $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \subseteq \partial A$: Sei $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ und $\varepsilon > 0$. Da $x \in \overline{A}$ gibt es $x_\varepsilon \in A$ mit $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$, also $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Da $x \in \overline{X \setminus A}$ gibt es $y_\varepsilon \in X \setminus A$ mit $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$, also auch $B(x,\varepsilon) \cap X \setminus A \neq \emptyset$. Insgesamt $x \in \overline{A}$ und $x \in \overline{X \setminus A}$.

(V) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$: $\mathring{A}$ und ∂A sind disjunkt, da es zu $x \in \mathring{A}$ ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt mit $B(x, \varepsilon_0) \subset A$, aber für $y \in \partial A$ und jedes $\varepsilon > 0$ gerade $B(y,\varepsilon) \cap X \setminus A \neq \emptyset$ gilt. Also folgt $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ aus $\overline{A} = \mathring{A} \dot\cup \partial A$.

Aufgabe 7

(I) ℓ^2 ist Vektorraum: Die Menge aller reellen Folgen ist ein VR mit gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation. Wir zeigen, dass ℓ^2 ein Untervektorraum davon ist.

- Seien $x = (x_j)_j$, $y = (y_j)_j \in \ell^2$. Setze, für $N \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_N), \quad \tilde{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Die Dreiecksungleichung in $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_2)$ liefert dann

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j+y_j|^2\right)^{\frac12} = |\tilde{x}+\tilde{y}|_2 \le |\tilde{x}|_2 + |\tilde{y}|_2$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)^{\frac12} + \left(\sum_{j=1}^{N}|y_j|^2\right)^{\frac12} \le \|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}. \quad (*)$$

Damit ist die Folge $\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j+y_j|^2\right)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da sie auch wachsend ist, ist sie konvergent für $N\to\infty$. Also existiert der Reihenwert $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^2$ in $\mathbb{R}$, und es folgt $\|x+y\|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^2\right)^{\frac12} < \infty$, d.h. $x+y\in\ell^2$.

- Seien $\lambda\in\mathbb{R}$ und $x\in\ell^2$. Dann gilt $\|\lambda x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^2 x_j^2\right)^{\frac12} = |\lambda|\,\|x\|_{\ell^2} < \infty$, also $\lambda x\in\ell^2$.

(II) <u>$\|\cdot\|_{\ell^2}$ definiert eine Norm auf ℓ^2:</u> Prüfe (N1), (N2), (N3).

- <u>Definitheit:</u> Falls $x=0\in\ell^2$, dann $x_j=0$ für alle j, also $\|x\|_{\ell^2}=0$.
  Falls $\|x\|_{\ell^2}=0$ für $x\in\ell^2$, dann $\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2 = 0$. Da $x_j^2\ge 0$ folgt $x_j^2=0$, also $x_j=0$ für alle $j\in\mathbb{N}$, was genau $x=0\in\ell^2$ heißt.
- <u>Homogenität:</u> Die Gleichung $\|\lambda x\|_{\ell^2} = |\lambda|\,\|x\|_{\ell^2}$ für $\lambda\in\mathbb{R}, x\in\ell^2$ wurde schon in (I) gezeigt.
- <u>Dreiecksungleichung:</u> Aus (*) folgt $\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j+y_j|^2\right)^{\frac12} \le \|x\|_{\ell^2}+\|y\|_{\ell^2}$ für $x,y\in\ell^2$. Da $\sum_{j=1}^{N}|x_j+y_j|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \|x+y\|_{\ell^2}^2$ und die Wurzel stetig ist, folgt daraus $\|x+y\|_{\ell^2} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j+y_j|^2\right)^{\frac12} \le \|x\|_{\ell^2}+\|y\|_{\ell^2}$.

(III) <u>ℓ^2 ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_{\ell^2}$:</u>

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{\ell^2}$, d.h. zu $\varepsilon>0$ gibt es $k(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $\|x_\ell - x_m\| < \varepsilon$ für alle $\ell,m\ge k(\varepsilon)$.

Wir schreiben $x_k = \left(y_j^{(k)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ für $k\in\mathbb{N}$.

<u>Zu zeigen:</u> Es gibt $x = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ mit $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ bzgl. $\|\cdot\|_{\ell^2}$.

Sei $j \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist $(y_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da für $\varepsilon > 0$:

$$|y_j^{(\ell)} - y_j^{(m)}| \leq \|x_\ell - x_m\|_{\ell^2} < \varepsilon \quad \text{für } \ell, m \geq k(\varepsilon).$$

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gibt es $y_j \in \mathbb{R}$ mit $y_j^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} y_j$ in $\mathbb{R}$.

Setze nun $x := (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

<u>Beh:</u> Diese Folge x erfüllt $x \in \ell^2$ und $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ bzgl. $\|\cdot\|_{\ell^2}$.

Zum Nachweis sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ fest. Dann

$$\left(\sum_{j=1}^N |y_j^{(\ell)} - y_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x_\ell - x_m\|_{\ell^2} < \varepsilon \quad \text{für } \underline{\text{alle}}\ \ell, m \geq k(\varepsilon).$$

Da die Funktion $t \mapsto \left(\sum\limits_{j=1}^N |y_j^{(\ell)} - t|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ für $\underline{\text{festes}}$ $N \in \mathbb{N}$, $\ell \geq k(\varepsilon)$

stetig ist und $y_j = \lim\limits_{m\to\infty} y_j^{(m)}$ für $j \in \mathbb{N}$, folgt

$$\left(\sum_{j=1}^N |y_j^{(\ell)} - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=1}^N |y_j^{(\ell)} - y_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \text{für } \underline{\text{alle}}\ \ell \geq k(\varepsilon),\ N \in \mathbb{N}. \qquad (**)$$

Damit ist insbesondere die wachsende Folge $\left(\sum\limits_{j=1}^N |y_j^{(k(\varepsilon))} - y_j|^2\right)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also konvergent, d.h. der Nebenwert $\sum\limits_{j=1}^\infty |y_j^{(k(\varepsilon))} - y_j|^2$ existiert in $\mathbb{R}$.

wegen $\|x_{k(\varepsilon)} - x\|_{\ell^2} = \left(\sum\limits_{j=1}^\infty |y_j^{(k(\varepsilon))} - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ gilt also $x - x_{k(\varepsilon)} \in \ell^2$. Da nach Voraussetzung $x_{k(\varepsilon)} \in \ell^2$ und ℓ^2 ein VR ist, folgt $x = (x - x_{k(\varepsilon)}) + x_{k(\varepsilon)} \in \ell^2$. Da ferner $(**)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt und die Wurzel stetig ist, folgt aus $(**)$

$$\|x_\ell - x\|_{\ell^2} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^N |y_j^{(\ell)} - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \ell \geq k(\varepsilon).$$

Also $x = \lim\limits_{\ell\to\infty} x_\ell$ in ℓ^2, wie behauptet.

Damit ist $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ ein vollständiger normierter Raum, d.h. ein Banachraum.

Aufgabe 8:

a) Da $f_j \in C^1[0,1]$ für $j \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Hauptsatz

$$f_j(x) = f_j(0) + \int_0^x f_j'(t)\,dt \qquad \text{für } \underline{\underline{\text{alle}}}\ x \in [0,1]. \quad (***)$$

Da $(f_j')_j$ gleichmäßig gegen g konvergiert, ist g stetig und für alle $x \in [0,1]$ gilt $\int_0^x g(t)\,dt = \lim_{j\to\infty} \int_0^x f_j'(t)\,dt$, da

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x f_j'(t)\,dt \right| &= \left| \int_0^x (g(t) - f_j'(t))\,dt \right| \\
&\leq \int_0^x |g(t) - f_j'(t)|\,dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |g(t) - f_j'(t)| \int_0^x 1\,dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |g(t) - f_j'(t)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Da ferner $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ und $f(0) = \lim_{j\to\infty} f_j(0)$ nach Voraussetzung, folgt aus $(***)$ und $j \to \infty$:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt \qquad \text{für } \underline{\underline{\text{alle}}}\ x \in [0,1].$$

Laut Hauptsatz ist f diff'bar auf $[0,1]$ mit $f' = g$. Da g stetig folgt f' stetig, also $f \in C^1[0,1]$.

b) In Aufgabe 1 wurde gezeigt, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ und $\|\cdot\|_{C^1}^*$ jeweils Normen auf $C^1[0,1]$ definieren. Es bleibt die Vollständigkeit zu zeigen.

Sei dazu $(f_j)_j \subset C^1[0,1]$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es $j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_k - f_l\|_{C^1} = \|f_k - f_l\|_\infty + \|f_k' - f_l'\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } k,l \geq j(\varepsilon).$$

Es folgt dass $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$ und $\|f_k' - f_l'\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k,l \geq j(\varepsilon)$, d.h. die Folgen $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}, (f_j')_{j\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ sind jeweils Cauchy-Folgen bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Nach Bsp. 3.4 b) gibt es Funktionen

$f, g \in C[0,1]$ mit $f = \lim_{j\to\infty} f_j$, $g = \lim_{j\to\infty} f_j'$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Da Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ dasselbe ist wie gleichmäßige Konvergenz, konvergiert $(f_j)_j$ auch punktweise gegen f, und aus a) folgt $f \in C^1[0,1]$ mit $f' = g$. Also

$$\|f - f_j\|_{C^1} = \|f - f_j\|_\infty + \|f' - f_j'\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

d.h. die Cauchy-Folge $(f_j)_j$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$ gegen f.

Damit ist $C^1[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$ vollständig.

Um zu zeigen, dass $C^1[0,1]$ auch bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}^*$ vollständig ist, nutzen wir die Äquivalenz von $\|\cdot\|_{C^1}$ und $\|\cdot\|_{C^1}^*$. Ist $(f_j)_j \subset C^1[0,1]$ Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}^*$, dann ist $(f_j)_j$ auch Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$. Damit ist $(f_j)_j$ konvergent bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$. Nach Prop. 1.8 ist $(f_j)_j$ auch konvergent bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}^*$. Also ist $C^1[0,1]$ vollständig bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}^*$.