2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 29. April 2011, 12 Uhr

Aufgabe 5: Man bestimme das Innere, den Abschluss und den Rand folgender Mengen:

a) $M_1 = \{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,

b) $M_2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ in $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$.

Aufgabe 6 (K): Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subset X$. Man zeige die Identitäten

$$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A, \qquad \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = \overline{A} \backslash A^\circ.$$

Aufgabe 7 (K): Es sei l^2 die Menge aller reellen Folgen $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|x\|_{l^2} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \Big)^{1/2} < \infty.$$

Man zeige, dass $(l^2, \|\cdot\|_{l^2})$, versehen mit gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation, ein Banachraum ist.

Aufgabe 8: Mit $C^1[0,1]$ bezeichnen wir wieder den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$ (vgl. Aufgabe 1).

a) Die Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^1[0,1]$ konvergiere punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, und die Folge $(f_j')_{j \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen konvergiere gleichmäßig gegen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Zeige, dass $f \in C^1[0,1]$ mit $f' = g$.

(Tipp: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.)

b) Man zeige, dass $C^1[0,1]$ ein Banachraum jeweils bezüglich $\|\cdot\|_{C^1}$ und $\|\cdot\|_{C^1}^*$ ist.