Lösungsvorschläge zur 3. Übung Analysis II

Aufgabe 9 Das GLS ist äquivalent zu

$$x = \frac{1}{10}(\sin x + \cos y), \quad y = \frac{1}{20}(x^2 - y^3).$$

Definiere die Abbildung $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f_1(x,y) = \frac{1}{10}(\sin x + \cos y), \quad f_2(x,y) = \frac{1}{20}(x^2 - y^3).$$

Setze ferner $M = [-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Die eindeutige Lösbarkeit des GLS ist äquivalent dazu, dass f genau einen Fixpunkt in M besitzt. Der Fixpunkt $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ist die gesuchte Lösung, da dann:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = (f_1(\tilde{x}, \tilde{y}), f_2(\tilde{x}, \tilde{y})) = \left(\frac{1}{10}(\sin\tilde{x} + \cos\tilde{y}), \frac{1}{20}(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^3)\right).$$

Wir zeigen mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass f genau einen Fixpunkt in M hat. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit $|\cdot|_1$ ausgestattet, also $|(x,y)|_1 = |x| + |y|$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 3.7 nach.

(I) $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_1)$ ist <u>Banachraum</u>: siehe Bsp. 3.4 a)

(II) M ist <u>abgeschlossen</u> bzgl. $|\cdot|_1$: folgt aus der Abg'heit von $[-1,1]$

(III) f <u>bildet M nach M ab</u>, d.h. $f: M \to M$:

Sei $(x,y) \in M$, also $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Dann gilt

$$|f_1(x,y)| \le \frac{1}{10}(|\sin x| + |\cos y|) \le \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \le 1,$$

$$|f_2(x,y)| \le \frac{1}{20}(x^2 + |y|^3) \le \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \le 1,$$

also $f_1(x,y) \in [-1,1]$, $f_2(x,y) \in [-1,1]$, d.h. $f(x,y) \in M$.

(IV) $f: M \to M$ ist <u>kontrahierend</u>, d.h. es gibt $L \in (0,1)$ mit

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|_1 \le L\,|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|_1$$

für alle $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in M$:

Sei dazu $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in M$ gegeben. Es gilt

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|_1 = |(f_1(x_1,y_1)-f_1(x_2,y_2),\ f_2(x_1,y_1)-f_2(x_2,y_2))|_1$$

$$= |f_1(x_1,y_1)-f_1(x_2,y_2)| + |f_2(x_1,y_1)-f_2(x_2,y_2)|.$$

Mit dem <u>Mittelwertsatz</u> schätzen wir ab:

$$|f_1(x_1,y_1)-f_1(x_2,y_2)| \le \frac{1}{10}\left(|\sin x_1-\sin x_2| + |\cos y_1-\cos y_2|\right)$$

$$\le \frac{1}{10}\left(\max_{\xi\in[-1,1]}|\cos\xi|\ |x_1-x_2| + \max_{\xi\in[-1,1]}|\sin\xi|\ |y_1-y_2|\right)$$

$$\le \frac{1}{10}|x_1-x_2| + \frac{1}{10}|y_1-y_2|.$$

Wegen $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$ und $y_1^3-y_2^3=(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)(y_1-y_2)$ gilt ferner

$$|f_2(x_1,y_1)-f_2(x_2,y_2)| \le \frac{1}{20}\left(|x_1^2-x_2^2| + |y_1^3-y_2^3|\right)$$

$$\le \frac{1}{20}\left((|x_1|+|x_2|)\,|x_1-x_2| + (y_1^2+|y_1y_2|+y_2^2)\,|y_1-y_2|\right)$$

$$\le \frac{1}{20}\left(2\,|x_1-x_2| + 3\,|y_1-y_2|\right)$$

$$= \frac{1}{10}|x_1-x_2| + \frac{3}{20}|y_1-y_2|.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|_1 \le \frac{1}{5}|x_1-x_2| + \frac{1}{4}|y_1-y_2|$$

$$\le \frac{1}{4}\left(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\right) = \frac{1}{4}|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|_1.$$

Also ist f kontrahierend, mit $L=1/4$.

Nach dem Banachschen FPS besitzt f genau einen Fixpunkt $(\tilde{x},\tilde{y})\in M$, und dies ist die eindeutige Lösung des GLS in $[-1,1]\times[-1,1]$.

Zur näherungsweisen Bestimmung von $(\tilde{x},\tilde{y})$ nutzen wir, dass für alle $(x_0,y_0)\in M$ die <u>Iterationsfolge</u> $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$(x_n,y_n) = f(x_{n-1},y_{n-1}),\ \dots,\ (x_1,y_1)=f(x_0,y_0),$$

für $n \to \infty$ gegen $(\tilde{x}, \tilde{y})$ konvergiert, mit der Fehlerabschätzung

$$|(x_n, y_n) - (\tilde{x}, \tilde{y})|_1 \le \frac{L^n}{1-L} |(x_1, y_1) - (x_0, y_0)|_1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Wir wählen $(x_0, y_0) = (0,0)$. Damit gilt $(x_1, y_1) = f(0,0) = (\frac{1}{10}, 0)$.

Wir bestimmen ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|(x_n, y_n) - (\tilde{x}, \tilde{y})|_1 \le 0{,}001$. Wegen $(*)$ ist dies erfüllt, falls

$$\frac{L^n}{1-L} |(x_1, y_1) - (x_0, y_0)|_1 = \frac{L^n}{1-L} \frac{1}{10} \le 0{,}001,$$

also, wegen $L = 1/4$, falls $(1/4)^n \le \frac{1}{75}$. Der Taschenrechner sagt aus, dass dies ab $n = 4$ erfüllt ist. Mit dem Taschenrechner erhalten wir dann

$$x_4 = 0{,}11\ldots, \qquad y_4 = 0{,}00\ldots.$$

Da ferner $|x_4 - 0{,}001| < 0{,}001$ und $|y_4 - 0{,}001| < 0{,}001$, stimmen die ersten beiden Nachkommastellen von x_4 und y_4 mit denen von $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ überein.

Aufgabe 10

a) M_1 ist nicht abgeschlossen, da $\frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, aber $0 \notin M_1$.

Damit kann M_1 auch nicht vollständig und nicht kompakt sein.

b) Die Intervalle $[0,1]$ und $[2,\infty)$ sind abgeschlossen, also ist $M_2 = [0,1] \cup [2,\infty)$ abgeschlossen als endliche Vereinigung abg. Mengen.

Da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, und abg. Teilmengen vollständiger Mengen wieder vollständig sind, ist M_2 auch vollständig. Da kompakte Mengen immer beschränkt sind (Prop 5.2), aber M_2 unbeschränkt ist, ist M_2 nicht kompakt.

c) Wir zeigen, dass M_3 beschränkt und abgeschlossen ist. Da $M_3 \subseteq \mathbb{R}^2$, folgt aus Satz 5.3 von Bolzano-Weierstrass die Kompaktheit von M_3, und damit auch die Vollständigkeit.

- M_3 ist beschränkt: falls $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung $x^4 + 2y^2 \leq 1$ erfüllt, muss auch $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ gelten. Damit ist M_3 z.B. in der Kugel $B((0,0), 2)$ enthalten, also beschränkt.
- M_3 ist abgeschlossen: Sei $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M_3$ mit $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$, $y_j \xrightarrow[j\to\infty]{} y$. Für alle j gilt dann $x_j^4 + 2y_j^2 \leq 1$, d.h. die Folge $z_j = x_j^4 + 2y_j^2$, $j \in \mathbb{N}$, erfüllt $z_j \leq 1$ für alle j. Damit auch $x^4 + 2y^2 = \lim_{j\to\infty} z_j \leq 1$, also $(x,y) \in M$.

Aufgabe 11

(a) Angenommen es gilt $d(A,K) = \inf_{a\in A, x\in K} \|a-x\| = 0$. Dann gibt es nach Definition des Infimums zwei Folgen $(a_j)_j \subset A$ und $(x_j)_j \subset K$ mit $\|a_j - x_j\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Da K kompakt ist, besitzt $(x_j)_j$ eine in K konvergente Teilfolge $(x_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Es gibt also ein $x \in K$ mit $x_{j_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} x$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|a_{j_i} - x\| \leq \|a_{j_i} - x_{j_i}\| + \|x_{j_i} - x\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

also auch $x = \lim_{i\to\infty} a_{j_i}$. Da $(a_{j_i})_i \subset A$ und A abgeschlossen, folgt $x \in A$. Da $A \cap K = \emptyset$ nach Voraussetzung, ist dies unmöglich. Damit muss $d(A,K) > 0$ gelten.

(b) Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $(x_j)_j \subset K$ mit

$$d(\{y\}, K) = \lim_{j\to\infty} \|y - x_j\|. \quad (*)$$

Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{j_i})_i$ und ein $\tilde{x} \in K$ mit $\tilde{x} = \lim_{i\to\infty} x_{j_i}$.

Wir behaupten, dass dieses $\tilde{x}$ die Gleichung $d(\{y\},K) = \|y-\tilde{x}\|$ erfüllt.
Dies folgt aus (*), falls $\|y-\tilde{x}\| = \|y - \lim_{i\to\infty} x_{j_i}\| = \lim_{i\to\infty} \|y-x_{j_i}\|$,
falls also die Abbildung $T: X \to \mathbb{R}$, $T(x) = \|y-x\|$, <u>stetig</u> ist.

Zum Nachweis der Stetigkeit von T schreiben wir $T = N \circ G$, mit den Abbildungen

$$G: X \to X,\ G(x) = y-x \qquad \text{und} \qquad N: X \to \mathbb{R},\ N(z) = \|z\|.$$

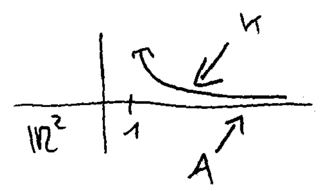
G ist stetig, da nach Prop. 1.13 für alle konvergenten Folgen $(a_j)_j \subset X$ gilt:

$$G(\lim_{j\to\infty} a_j) = y - \lim_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty}(y-a_j) = \lim_{j\to\infty} G(a_j).$$

Ferner ist die Normabbildung N stetig nach Bsp. 6.3 b).
Nach Prop. 6.2 b) ist dann auch die Komposition aus G und N, also $T = N\circ G$, eine stetige Abbildung.
Wie behauptet folgt daraus $d(\{y\},K) = \|y-\tilde{x}\|$.

c) (I) Aussage a) ist i.a. falsch, wenn K nur abgeschlossen ist.
Wähle z.B. $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$ und $K = \{(x,\frac{1}{x}) \mid x \in [1,\infty)\}$.
Dann sind A und K abgeschlossen, und es gilt

$$|(x,0)-(x,\tfrac{1}{x})|_2 = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0,$$



d.h. $d(A,K) = 0$.

(II) Für $X = \mathbb{R}^n$ gilt b) auch, wenn K nur abgeschlossen ist.

<u>Bew:</u> Wähle $r>0$ mit $\overline{B}(y,r)\cap K \neq \emptyset$. Dann gilt

$d(\{y\},K) = d(\{y\}, \overline{B}(y,r)\cap K)$, da wegen $\|y-x\|\le r$ für $x\in\overline{B}(y,r)$ und $\|y-x\|>r$ für $x\notin \overline{B}(y,r)$ gilt

$$\inf_{x\in K}\|y-x\| = \inf_{x\in\overline{B}(y,r)\cap K}\|y-x\|.$$

Da $\overline{B}(y,r)\cap K$ beschränkt und abgeschlossen, ist $\overline{B}(y,r)\cap K$ nach Bolzano-Weierstrass kompakt. Nach b) gibt es ein $\tilde{x}\in \overline{B}(y,r)\cap K\subseteq K$ mit $d(\{y\},K) = \inf_{x\in\overline{B}(y,r)\cap K} \|y-x\| = \|y-\tilde{x}\|$.

Aufgabe 12

a) Schreibe $f=(f_1,f_2,f_3)$, mit

$f_1(t)=\sin t$, $f_2(t)=\cos t$, $f_3(t)=t$ für $t\in\mathbb{R}$.

Nach Bsp. 6.3 c) ist f genau dann stetig, wenn $f_1,f_2,f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig sind. Dies wurde in Ana I gezeigt.

b) Wie eben ist $g=(g_1,g_2,g_3)$ mit $g_1,g_2,g_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$g_1(r,\varphi,\theta)=r\cos\theta\cos\varphi$, $g_2(r,\varphi,\theta)=r\cos\theta\sin\varphi$, $g_3(r,\varphi,\theta)=r\sin\theta$,

genau dann stetig, wenn g_1,g_2,g_3 stetig sind. Nach Bsp. 6.3 c) sind die Koordinatenprojektionen $\phi_r,\phi_\varphi,\phi_\theta:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$\phi_r(r,\varphi,\theta)=r,\quad \phi_\varphi(r,\varphi,\theta)=\varphi,\quad \phi_\theta(r,\varphi,\theta)=\theta,$$

stetig. Wegen

$$g_1(r,\varphi,\theta)=\phi_r(r,\varphi,\theta)\cdot(\cos\circ\phi_\theta)(r,\varphi,\theta)\cdot(\cos\circ\phi_\varphi)(r,\varphi,\theta)$$

ist g_1 nach Bsp. 6.2 b), c) stetig, da es sich als Multiplikation von Kompositionen stetiger Funktionen schreiben lässt.
Genauso argumentiert man für g_2 und g_3.

c) Es sei $(f_j)_j\subset C[0,1]$ mit $f_j\xrightarrow[j\to\infty]{} f\in C[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Dann gilt

$$|I(f_j)-I(f)|\leq\int_0^1|f_j(t)-f(t)|\,dt\leq\|f_j-f\|_\infty\xrightarrow[j\to\infty]{}0,$$

also $I(f)=\lim_{j\to\infty}I(f_j)$. Damit ist I stetig.

[Vergleiche die Lösung von Aufgabe 8a)!]