3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 6. Mai 2011, 12 Uhr

Aufgabe 9 (K): Zeige mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass das Gleichungssystem

$$10x = \sin x + \cos y, \qquad 20y = x^2 - y^3,$$

genau eine Lösung $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in [-1,1] \times [-1,1]$ besitzt. Bestimme die Lösung (mit dem Taschenrechner o.ä.) bis auf zwei Nachkommastellen genau.

Aufgabe 10: Untersuche die folgenden Mengen auf Kompaktheit, Vollständigkeit und Abgeschlossenheit:

a) $M_1 = \{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$;

b) $M_2 = [0,1] \cup [2,\infty)$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$;

c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + 2y^2 \leq 1\}$ in $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$.

Aufgabe 11 (K): Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $A, K \subset X$ ist definiert als

$$d(A,K) := \inf_{a\in A,\, x\in K} \|a - x\|.$$

a) Es seien A abgeschlossen, K kompakt und es gelte $A \cap K = \emptyset$. Zeige, dass $d(A,K) > 0$.

b) Es sei K kompakt. Zeige, dass es für alle $y \in X$ ein $\widetilde{x} \in K$ gibt mit $d(\{y\}, K) = \|y - \widetilde{x}\|$.

c) Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Gelten die Aussagen in a) und b) auch, wenn K nur abgeschlossen ist?

Aufgabe 12: Zeige, dass die folgenden Abbildungen stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (\sin t, \cos t, t)$;

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g(r,\varphi,\theta) = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$;

c) $I : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}, \quad I(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.