Lösungsvorschläge zur 4. Übung Analysis II

Aufgabe 13 a) "$\Rightarrow$" Es gelte $a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$ für alle $i,j = 1,\dots,n$.

Für $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $|x|_2 = 1$ gilt $|x_1|,\dots,|x_n| \le 1$. Damit

$$\|T - T_k\| = \sup_{|x|_2=1} |(T-T_k)x|_2 = \sup_{|x|_2=1} |(A-A_k)x|_2 \overset{\text{Prop 1.6}}{\le} \sup_{|x|_2=1} |(A-A_k)x|_1$$

$$= \sup_{|x|_2=1} \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ij}^{(k)}) x_j \right| \right) \le \sup_{|x|_2=1} \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \underbrace{|x_j|}_{\le 1} \right)$$

$$\le \sup_{|x|_2=1} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

also $T = \lim_{k\to\infty} T_k$ bzgl. $\|\cdot\|$.

"$\Leftarrow$" Es gelte $T = \lim_{k\to\infty} T_k$ bzgl. $\|\cdot\|$, also

$$\sup_{|x|_2=1} |(T-T_k)x|_2 = \sup_{|x|_2=1} |(A-A_k)x|_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Wir nutzen dies für $x = e_j = (0,\dots,0,\underset{j\text{-te Stelle}}{1},0,\dots,0)$, $|e_j|_2 = 1$. Für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \le \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij} - a_{ij}^{(k)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |(A-A_k)e_j|_2 \le \sup_{|x|_2=1} |(A-A_k)x|_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

also $a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$.

b) Für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit zugehöriger Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ gilt nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz

$$\det T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

$\det$ besteht also "nur" aus Summen und Produkten der a_{ij}, hängt damit stetig von den a_{ij} ab. Da $T = \lim_{k\to\infty} T_k$ bzgl. $\|\cdot\|$ gleichbedeutend ist mit $a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ (nach a)), folgt

$$\det T = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \left(\lim_{k\to\infty} a_{1\sigma(1)}^{(k)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\lim_{k\to\infty} a_{n\sigma(n)}^{(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}^{(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}^{(k)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \det T_k.$$

c) $GL_n(\mathbb{R})$ ist offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$: Es gilt

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid \det T \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

Da $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ offen und det stetig, ist $GL_n(\mathbb{R})$ offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

$GL_n(\mathbb{R})$ ist dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$: Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Aus LA wissen wir, dass $T - \lambda I_n$ nur für höchstens endlich viele Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$, den Eigenwerten von T, nicht invertierbar ist. Damit gilt $T - \frac{1}{j} I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$. Da die Komponenten der zu $T - \frac{1}{j} I_n$ gehörenden $n\times n$-Matrix für $j \to \infty$ gegen die Komponenten der zu T gehörenden Matrix konvergieren, folgt $T = \lim\limits_{j\to\infty} (T - \frac{1}{j} I_n)$, aus a).
Wir können also jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ als Grenzwert einer Folge aus $GL_n(\mathbb{R})$ darstellen. Damit $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $GL_n(\mathbb{R})$ ist dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 14

a) Es gilt $f = (f_1, \dots, f_n)$ mit $f_i : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = \frac{1}{|x|_2} x_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Die Abbildung $N : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $N(x) = |x|_2$, ist stetig, die Inversion $I : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $I(t) = t^{-1}$, ist stetig, und die Koordinatenprojektion $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\phi_i(x) = x_i$, ist auch stetig. Da $f_i = (I \circ N) \cdot \phi_i$, ist f_i als Komposition und Produkt stetiger Funktionen stetig, $i = 1, \dots, n$.
Da die Stetigkeit von f äquivalent ist zur Stetigkeit der Komponenten f_i, folgt die Stetigkeit von f.

b) Außerhalb von $x = 0$ ist g als Komposition stetiger Funktionen stetig. Zu prüfen ist also, ob $g(0) = 0 = \lim\limits_{j\to\infty} g(x_j)$ für jede Folge $(x_j)_j \subset \mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0$ bzgl. $|\cdot|_2$, d.h. $|x_j|_2 \xrightarrow{j\to\infty} 0$.

Setze $r_j = |x_j|_2$. Dann $r_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ nach Voraussetzung. Ferner

$g(x_j) = \sin(r_j) \ln(r_j^2)$ für alle j.

Aus L'Hospital folgt für $t>0$:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\ln(t^2)}{1/\sin t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\downarrow 0} \frac{2/t}{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}} = -2\lim_{t\downarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t\cos t} = -2\underbrace{\left(\lim_{t\downarrow 0}\frac{\sin t}{t}\right)}_{=1}\underbrace{\lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)}_{=0} = 0.$$

Also $\lim_{j\to\infty} g(x_j) = \lim_{j\to\infty} \sin(r_j)\ln(r_j^2) = 0$ für alle $(x_j)_j$ mit $|x_j|_2 = r_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Damit ist g auch stetig in $x=0$.

c) Wir zeigen, dass $|d_A(x)-d_A(y)| \le \|x-y\|$ für alle $x,y\in X$. Dann ist d_A Lipschitz-stetig, also insbesondere stetig.

Es seien $x,y\in X$ und $a_0\in A$ beliebig. Es gilt

$$d_A(x) \le \|x-a_0\| \le \|x-y\| + \|y-a_0\|.$$

Da die linke Seite $d_A(x)$ unabhängig von a_0 ist, gilt die Ungleichung auch im Infimum, also

$$d_A(x) \le \|x-y\| + \inf_{a_0\in A}\|y-a_0\| = \|x-y\| + d_A(y).$$

Damit $d_A(x)-d_A(y) \le \|x-y\|$. Vertauscht man x und y in obiger Argumentation, folgt $d_A(y)-d_A(x) \le \|y-x\| = \|x-y\|$. Insgesamt $|d_A(x)-d_A(y)| \le \|x-y\|$, wie behauptet.

<u>Aufgabe 15</u>

a) Es sei $x_0\in\mathbb{R}$. Falls $x_0=0$, gilt $f_{x_0}(y)=0$ für alle $y\in\mathbb{R}$, f_{x_0} ist also stetig. Falls $x_0\neq 0$, gilt $f_{x_0}(y) = \frac{x_0 y}{x_0^2+y^2}$ für $y\in\mathbb{R}$. Da der Nenner $x_0^2+y^2$ niemals 0 wird, ist f_{x_0} stetig als Komposition stetiger Fkt. Die selbe Argumentation zeigt die Stetigkeit von f_{y_0} für alle $y_0\in\mathbb{R}$.
Also ist f <u>partiell stetig</u>.

<u>f ist nicht stetig in $(x,y)=(0,0)$:</u> Für die Folge $\left(\left(\frac{1}{j},\frac{1}{j}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ gilt

$$f\left(\tfrac{1}{j},\tfrac{1}{j}\right) = \frac{\frac{1}{j^2}}{\frac{2}{j^2}} = \frac{1}{2}, \text{ also } \lim_{j\to\infty} f\left(\tfrac{1}{j},\tfrac{1}{j}\right) = \tfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0),$$

d.h. f ist unstetig bei $(x,y)=(0,0)$.

b) Es seien $\varepsilon>0$ und $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ gegeben. Für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le |f(x,y)-f(x_0,y)| + |f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$$
$$= |f(x,y)-f(x_0,y)| + |f_{x_0}(y)-f_{x_0}(y_0)|.$$

Da f_{x_0} nach Voraussetzung stetig ist, gibt es ein $\tau>0$ mit

$$|f_{x_0}(y)-f_{x_0}(y_0)| \le \varepsilon/2 \quad \text{falls} \quad |y-y_0|\le\tau.$$

Nach Voraussetzung gibt es ferner ein $\eta>0$ so, dass für alle $y\in\mathbb{R}$ gilt

$$|f(x,y)-f(x_0,y)| \le \varepsilon/2 \quad \text{falls} \quad |x-x_0|\le\eta.$$

Insbesondere gilt dies für alle y mit $|y-y_0|\le\tau$.

Setze nun $\delta=\min\{\tau,\eta\}$. Falls $|(x,y)-(x_0,y_0)|_2\le\delta$, gilt

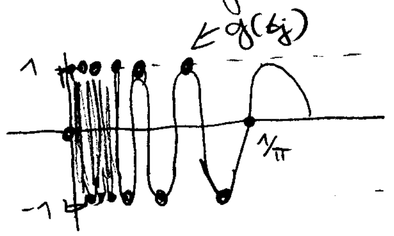
$$|y-y_0| \le |(x,y)-(x_0,y_0)|_2 \le \delta\le\tau,$$
$$|x-x_0| \le |(x,y)-(x_0,y_0)|_2 \le \delta\le\eta.$$

Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $|(x,y)-(x_0,y_0)|_2\le\delta$ gilt damit

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

f erfüllt also in jedem Punkt (x_0,y_0) das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit und ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

Aufgabe 16



Skizze von M

M ist nicht wegzusammenhängend! Beweis mit Widerspruch.

Angenommen, es gäbe eine stetige Abbildung $g:[0,1]\to M\subseteq\mathbb{R}^2$, $g(t)=(g_1(t),g_2(t))$, mit $g(0)=(0,0)$, $g(1)=(\frac{1}{\pi},0)$. Dann sind g_1, g_2 stetig.

Setze $r:=\sup\{t\in[0,1]: g_1(t)=0\}$. Da g_1 stetig, folgt $g_1(r)=0$. Aus $g_1(r)=0$, $g_1(1)=\frac{1}{\pi}$ und dem Zwischenwertsatz

folgt, dass es für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $t_j \in (r,1]$ gibt mit $g_1(t_j) = \frac{1}{j\pi}$.
Da $(t_j)_j \subset [r,1]$ und $[r,1]$ kompakt, gibt es eine konvergente Teilfolge $(t_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$. t^* bezeichne ihren Grenzwert. Wegen

$$g_1(t^*) = g_1(\lim_{k\to\infty} t_{j_k}) = \lim_{k\to\infty} g_1(t_{j_k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{j_k\pi} = 0,$$

muss $t^* = r$ gelten, denn per Konstruktion gilt $g_1(t) > 0$ falls $t > r$.
Ferner folgt aus $g_1(t_j) > 0$, dass $g_2(t_j) = \sin\left(\frac{1}{g_1(t_j)}\right) = \sin(j\pi) = 0$,
sowie $g_2(r) = g_2(\lim_{k\to\infty} t_{j_k}) = \lim_{k\to\infty} g_2(t_{j_k}) = 0$. (*)

Wieder aus dem ZWS folgt, dass es für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $a_j \in (r,1]$ gibt mit $g_1(a_j) = \frac{1}{(2j+\frac{1}{2})\pi}$. Wie eben erhalten wir eine Teilfolge $(a_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{j_k} = r$. Außerdem $g_2(a_j) = \sin((2j+\frac{1}{2})\pi) = 1$ für alle j, also $g_2(r) = \lim_{k\to\infty} g_2(a_{j_k}) = 1$. Dies widerspricht (*)!