4. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Lutz Weis, Martin Meyries

Abgabe bis Freitag, 13. Mai 2011, 12 Uhr

Im Folgenden sei jeder auftretende $\mathbb{R}^n$ mit $|\cdot|_2$ versehen.

Aufgabe 13: Es sei $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ der normierte Raum der linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$, mit Norm $\|T\| = \sup\{|Tx|_2 \mid x \in \mathbb{R}^n,\ |x|_2 = 1\}$ für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ kann eindeutig mit einer $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ identifiziert werden. Zeige:

a) Es seien $T, T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j}$. Dann gilt $T = \lim\limits_{k\to\infty} T_k$ bzgl. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn $a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$ für alle i, j.

b) Die Determinante $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

c) Die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren Elemente aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist offen und dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 14 (K): Zeige, dass die folgenden Abbildungen stetig sind.

a) $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{|x|_2}\, x;$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin(|x|_2)\ln(|x|_2^2)$ für $x \neq 0, \quad g(0) = 0;$

c) $d_A : X \to \mathbb{R},\ d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x-a\|,$ für jeden normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Aufgabe 15 (K): Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt partiell stetig, wenn für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f_{x_0}, f_{y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y), \qquad f_{y_0}(x) = f(x, y_0),$$

stetig sind.

a) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

partiell stetig, aber nicht stetig ist.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei partiell stetig, und für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gebe es ein $\eta > 0$ derart, dass

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } |x - x_0| \leq \eta.$$

Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 16: Ist die Menge

$$M = \big(\{0\} \times [-1,1]\big) \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1),\ y = \sin(1/x)\big\}$$

wegzusammenhängend in $\mathbb{R}^2$?