Lösungsvorschläge zur 5. Übung Analysis II

Aufgabe 17 a) Als Komposition zweifach stetig (partiell) diff'barer Funktionen ist u auch zweifach stetig partiell diff'bar. Es seien $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. Mit der Kettenregel bzgl. t gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-n/2}\cdot\exp\left(-\frac{|x|_2^2}{4}t^{-1}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{n}{2}\right)t^{-n/2-1}\cdot\exp\left(-\frac{|x|_2^2}{4}t^{-1}\right) + t^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|_2^2}{4}t^{-1}\right)\left(-\frac{|x|_2^2}{4}\right)(-1)t^{-2}$$

$$= -\frac{n}{2}t^{-1}u(t,x) + u(t,x)\cdot\frac{|x|_2^2}{4}t^{-2} = u(t,x)\left(\frac{|x|_2^2}{4}t^{-2}-\frac{n}{2}t^{-1}\right).$$

Nun sei $i\in\{1,\dots,n\}$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|x|_2^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2+\dots+x_n^2) = 2x_i.$$

Daraus folgt mit der Kettenregel bzgl. x_i

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x) = t^{-n/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\exp\left(-\frac{|x|_2^2}{4t}\right)\right) = t^{-n/2}\exp\left(-\frac{|x|_2^2}{4t}\right)\left(-\frac{1}{4t}\right)2x_i$$

$$= -u(t,x)\frac{x_i}{2t},$$

und ferner, mit der Produktregel,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u(t,x)\frac{x_i}{2t}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x)\right)\frac{x_i}{2t} - u(t,x)\frac{1}{2t}$$

$$= u(t,x)\frac{x_i^2}{4t^2} - u(t,x)\frac{1}{2t} = u(t,x)\left(\frac{x_i^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right).$$

Summation über i liefert

$$\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(t,x) = u(t,x)\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right) = u(t,x)\left(\frac{|x|_2^2}{4}t^{-2}-\frac{n}{2}t^{-1}\right).$$

Der Vergleich mit $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$ zeigt, dass u für alle $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$ die Wärmeleitungsgleichung löst.

b) Wieder ist w zweifach stetig partiell diff'bar. Für $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t}w(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(h\cdot x-|h|_2ct)\right) = f'(h\cdot x-|h|_2ct)\cdot(-|h|_2c)$$

$$= -|h|_2c\,f'(h\cdot x-|h|_2ct),$$

und ferner

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-|k|_2 c\, f'(k\cdot x - |k|_2 ct)\right) = -|k|_2 c\, f''(k\cdot x - |k|_2 ct)\,(-|k|_2 c)$$

$$= c^2 |k|_2^2 f''(k\cdot x - |k|_2 ct).$$

Nun sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}(k\cdot x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(k_1x_1 + \dots + k_nx_n) = k_i$.

Daraus folgt mit der Kettenregel bzgl. x_i:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w(t,x) = f'(k\cdot x - |k|_2 ct)\frac{\partial}{\partial x_i}(k\cdot x) = f'(k\cdot x - |k|_2 ct)\, k_i,$$

und ferner,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'(k\cdot x - |k|_2 ct)\, k_i\right) = f''(k\cdot x - |k|_2 ct)\, k_i^2.$$

Summation über i ergibt

$$\Delta w(t,x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w(t,x) = |k|_2^2 f''(k\cdot x - |k|_2 ct).$$

Der Vergleich mit $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,x)$ zeigt, dass w für alle $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ die Wellengleichung löst

Aufgabe 18 Für $i \in \{1,\dots,n\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x),$$

und ferner

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(fg)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x)\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x)\cdot g(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) + f(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(x)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x)\cdot g(x) + 2\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) + f(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(x).$$

Summation über i ergibt

$$\Delta(fg)(x) = \Delta f(x)\, g(x) + 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) + f(x)\cdot \Delta g(x)$$

$$= \Delta f(x)\, g(x) + 2\, \operatorname{grad} f(x) \cdot \operatorname{grad} g(x) + f(x)\, \Delta g(x).$$

Aufgabe 19

(I) f ist in allen $x \in \mathbb{R}^2$ stetig: f ist komponiert aus der euklidischen Norm $|\cdot|_2 : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ und der α-te Potenz $[0,\infty) \to [0,\infty)$.
Da diese Abbildungen stetig sind, ist auch f stetig.

(II) Da f symmetrisch ist in x_1 und x_2, untersuchen wir nur $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)$.

Fall 1 $x = (x_1, x_2)$ mit $x_2 = 0$.
Per Definition existiert $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, 0)$ genau dann, wenn die Fkt
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = (t^2 + 0)^{\alpha/2} = |t|^\alpha$, an der Stelle $t = x_1$
diffbar ist. Nach Aufg I gilt das für $t \neq 0$ für jedes α, für
$t = 0$ nur für $\alpha > 1$.

Fall 2 $x = (x_1, x_2)$ mit $x_2 \neq 0$.
$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$ existiert genau dann, wenn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = (t^2 + c)^{\alpha/2}$,
differenzierbar bei $t = x_1$ ist. Hier haben wir $c := x_2^2 \neq 0$ gesetzt.
Nach Aufg I ist die Fkt $a : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $a(t) = t^2 + c$,
für alle $t \in \mathbb{R}$ diffbar. Ferner ist $b : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $b(s) = s^{\alpha/2}$,
diffbar (da die Null rausgenommen wird!). Also ist auch
$h = b \circ a$ für alle $t \in \mathbb{R}$ diffbar.

Insgesamt existiert $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$ also für alle $\alpha > 0$ und $(x_1, x_2) \neq (0,0)$,
für $(x_1, x_2) = (0,0)$ existiert sie nur für $\alpha > 1$.

(III) Für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ und alle $\alpha > 0$ gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha/2 - 1} \cdot 2x_1 = \alpha x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha/2 - 1}$$

$$= \alpha x_1 |x|_2^{\alpha - 2}.$$

Für $(x_1, x_2) = (0,0)$ und $\alpha > 1$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0) = g'(t)\big|_{t=0} = 0.$$

Durch Vertauschen von x_1 und x_2 erhalten wir also

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x)\right) = \begin{cases} \alpha |x|_2^{\alpha-2} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{falls } \alpha > 1).$$

(IV) • In $x \neq 0$ sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \alpha |x|_2^{\alpha-2} x_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) = \alpha |x|_2^{\alpha-2} x_2,$$

jeweils stetig. Also ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig partiell diff'bar, und nach Satz 3.2 auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ auch (stetig) differenzierbar. (für alle $\alpha > 0$).

• Für $\alpha \in (0,1]$ kann f in $x = 0$ nicht diff'bar sein, da sonst (nach Satz 3.6.), die partiellen Ableitungen in $x=0$ existieren würden.

• Nun sei $\alpha > 1$. Dann gilt

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\right| = \alpha \, (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha/2 - 1} |x_1| \leq \alpha \, (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha/2 - 1/2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

und analog $\left|\frac{\partial}{\partial x_2} f(x)\right| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Also sind die partiellen Ableitungen stetig in $x = 0$. Nach Satz 3.2 ist f also für $\alpha > 1$ auch in $x = 0$ (stetig) diff'bar.

Aufgabe 20

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fest. Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(\lambda) = f(\lambda x_0) - \lambda^\alpha f(x_0),$$

identisch Null. Damit ist auch ihre Ableitung identisch Null.

Betrachte die Hilfsfunktion

$$h : (0,\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad h(\lambda) = \lambda \cdot x_0 .$$

Diese ist diff'bar, mit Ableitung

$$h'(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda x_{0,1}), \ldots, \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda x_{0,n})\right) = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) = x_0 .$$

Nach der Kettenregel, Satz 3.4, ist dann auch die Funktion

$$f \circ h : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad (f \circ h)(\lambda) = f(\lambda x_0),$$

diffbar, mit Ableitung

$$(f \circ h)'(\lambda) = (\operatorname{grad} f)(h(\lambda)) \cdot h'(\lambda) = \operatorname{grad} f(\lambda x_0) \cdot x_0 .$$

Schließlich ist $\tilde{h} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\tilde{h}(\lambda) = \lambda^\alpha f(x_0)$, diffbar, mit

$$\tilde{h}'(\lambda) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_0).$$

Wir folgern, dass für alle $\lambda > 0$ gilt

$$0 = g'(\lambda) = (f \circ h)'(\lambda) - \tilde{h}'(\lambda) = \operatorname{grad} f(\lambda x_0) \cdot x_0 - \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_0).$$

Für $\lambda = 1$ erhalten wir $\operatorname{grad} f(x_0) \cdot x_0 = \alpha f(x_0)$.