Lösungsvorschläge zur 6. Übung Analysis II

Aufgabe 21 Für $j \in \{1, \dots, n\}$ rechnen wir mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g(f(x))\right) = g'(f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} g\right)(f(x)), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} g\right)(f(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x).$$

Aus Produkt- und Kettenregel erhalten wir ferner für $i \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} g(f(x))\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)'(f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} f_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} f_m(x) \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x)$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} f_l(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x)\right] + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g\right)(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f_k(x).$$

Aufgabe 22 a) Wir zeigen, dass f an jedem Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$, mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, total differenzierbar ist. Sei dazu $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$, mit $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n$. Aus der Multilinearität von f folgt

$$f(x+h) = f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n)$$

$$= f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + R(x,h),$$

wobei $R(x,h)$ eine Summe ist über f mit <u>mindestens zwei</u> $h_{i_1}, h_{i_2} \in \mathbb{R}^n$ eingesetzt. Wir <u>definieren</u> nun

$$f': \mathbb{R}^{n^2} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}), \qquad \left(f'(x_1, \dots, x_n)\right)(h_1, \dots, h_n) := \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

- <u>Es gilt wirklich $f'(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2})$, für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$:</u>

Für $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgern wir aus der Multilinearität von f, dass

$$\left(f'(x_1, \dots, x_n)\right)\left(\lambda(h_1, \dots, h_n) + (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n)\right) = \left(f'(x_1, \dots, x_n)\right)\left(\lambda h_1 + \tilde{h}_1, \dots, \lambda h_n + \tilde{h}_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda h_i + \tilde{h}_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{h}_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$= \lambda \left(f'(x_1, \dots, x_n)\right)(h_1, \dots, h_n) + \left(f'(x_1, \dots, x_n)\right)(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n),$$

d.h. $f'(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R})$.

- <u>Es gilt $R(x,h) = o(|h|_2)$ für $h \to 0$, d.h. $\dfrac{R(x,h)}{|h|_2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$:</u>

$R(x,h)$ ist eine Summe über Terme der Form

$$f(h_{i_1}, \dots, h_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}), \qquad i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \{2, \dots, n\}.$$

(Hier schreiben wir <u>O.B.d.A.</u> die h's in die ersten Argumente von f.)

Für eine <u>Basis</u> $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$h_{i_1} = \sum_{l=1}^{n} h_{i_1}^{(l)} e_l, \quad \dots, \quad h_{i_k} = \sum_{l=1}^{n} h_{i_k}^{(l)} e_l.$$

Aus der Multilinearität von f folgt dann

$$|f(h_{i1},\dots,h_{in},x_{i_{n+1}},\dots,x_{in})| = \left|f\left(\sum_{\ell=1}^{n} h_{i1}^{(\ell)}e_\ell,\dots,\sum_{\ell=1}^{n} h_{in}^{(\ell)}e_\ell,\ x_{i_{n+1}},\dots,x_{in}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{\ell_{i1},\dots,\ell_{in}=1}^{n} h_{i1}^{(\ell_{i1})}\cdot\ldots\cdot h_{in}^{(\ell_{in})}\ f(e_{\ell_{i1}},\dots,e_{\ell_{in}},x_{i_{n+1}},\dots,x_{in})\right|$$

$$\le \sum_{\ell_{i1},\dots,\ell_{in}=1}^{n} |h_{i1}^{(\ell_{i1})}|\cdot\ldots\cdot|h_{in}^{(\ell_{in})}|\ |f(e_{\ell_{i1}},\dots,e_{\ell_{in}},x_{i_{n+1}},\dots,x_{in})|$$

$$\le \underbrace{k\cdot n\cdot \max_{\ell_{i1},\dots,\ell_{in}=1,\dots,n} |f(e_{\ell_{i1}},\dots,e_{\ell_{in}},x_{i_{n+1}},\dots,x_{in})|}_{=:C}\ |h_{i1}|_2\cdot\ldots\cdot|h_{in}|_2$$

$$= C\cdot|h_{i1}|_2\cdot\ldots\cdot|h_{in}|_2 .$$

Da $\dfrac{|h_{i1}|_2}{|h|_2}\le 1$ für alle $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^{n^2}\setminus\{0\}$, erhalten wir

$$\frac{|f(h_{i1},\dots,h_{in},x_{i_{n+1}},\dots,x_{in})|}{|h|_2}\le C\cdot\underbrace{\frac{|h_{i1}|_2}{|h|_2}}_{\le 1}\cdot|h_{i2}|_2\cdot\ldots\cdot|h_{in}|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Also $R(x,h)=o(|h|_2)$, wie behauptet.
Damit ist f in jedem $x\in\mathbb{R}^{n^2}$ total differenzierbar, mit Ableitung $f'(x)$ wie oben angegeben.

b) Da det n-multilinear ist, folgern wir aus a), dass det auf ganz $\mathbb{R}^{n^2}$ total differenzierbar ist, mit Ableitung $\det'(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2},\mathbb{R})$,

$$\det'(x)\,h=\sum_{i=1}^{n}\det(x_1,\dots,x_{i-1},h_i,x_{i+1},\dots,x_n),\qquad h\in\mathbb{R}^{n^2},$$

für $x\in\mathbb{R}^{n^2}$.

Aufgabe 23 a) Schreibe $v_j=(v_j^{(1)},\dots,v_j^{(n)})$ für $j\in\mathbb{N}$. Für $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ und $i\in\{1,\dots,n\}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{N}\left((x_1-v_j^{(1)})^2+\ldots+(x_n-v_j^{(n)})^2\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}2(x_i-v_j^{(i)}) .$$

Damit $\operatorname{grad} f(x) = \left(\sum_{j=1}^{N} 2(x_1 - v_j^{(1)}), \ldots, \sum_{j=1}^{N} 2(x_n - v_j^{(n)})\right)$

$$= \sum_{j=1}^{N} 2(x - v_j). = 2\left(Nx - \sum_{j=1}^{N} v_j\right).$$

Es gilt also $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j$.

Für die Hesse-Matrix in $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_n} f(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{j=1}^{N} 2 \end{pmatrix} = 2N\, \mathrm{id}_n,$$

also insbesondere ist $H_f(x_0) = 2N\,\mathrm{id}_n$ positiv definit, und f hat in x_0 ein striktes <u>lokales</u> Minimum.

Wir müssen noch zeigen, dass x_0 auch <u>globales</u> Minimum ist, d.h. $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \neq x_0$. Für $j \in \{1, \ldots, N\}$ gilt $|x|_2 \leq |x - v_j|_2 + |v_j|_2$.

wegen $2ab \leq a^2 + b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$, folgt

$$|x|_2^2 \leq |x - v_j|_2^2 + |v_j|_2^2 + 2|x - v_j|_2 |v_j|_2 \leq 2(|x - v_j|_2^2 + |v_j|_2^2).$$

Damit

$$|x|_2^2 \leq N|x|_2^2 \leq 2\sum_{j=1}^{N}\left(|x - v_j|_2^2 + |v_j|_2^2\right) = 2\left(f(x) + \sum_{j=1}^{N} |v_j|_2^2\right),$$

und wir folgern, dass $f(x) \to +\infty$ für $|x|_2 \to +\infty$.

Insbesondere gibt es ein $r > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \notin \overline{B}(x_0, r)$.

Da f <u>stetig</u> und $\overline{B}(x_0, r)$ <u>kompakt</u>, nimmt f auf $\overline{B}(x_0, r)$ sein Minimum an. In diesem muss $\operatorname{grad} f$ verschwinden. Da $\operatorname{grad} f$ aber genau in x_0 verschwindet, muss dieses Minimum in x_0 sein. Wir folgern $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. x_0 ist striktes <u>globales</u> Minimum von f.

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist per Definition ein kritischer Punkt von g, falls $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0)$.

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt nach der Produktregel und der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = 2x \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right) + (2y + x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \left(2x - xy - \frac{x^3}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right).$$

Genauso folgt $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = (2 - x^2y - 2y^2) \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right)$.

Damit $\operatorname{grad} g(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right) \left(2x - xy - \frac{x^3}{2},\ 2 - x^2y - 2y^2\right) = (0,0)$,

falls $\begin{cases} 4x = x(2y + x^2) \\ 2 = y(2y + x^2). \end{cases}$

<u>1. Fall</u> $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$. <u>2. Fall</u> $x \neq 0 \Rightarrow 2y + x^2 = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2},\ x = \pm\sqrt{3}$.

Wir erhalten vier kritische Punkte

$$V_\pm = (0, \pm 1), \quad W_\pm = \left(\pm\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Für die Hesse-Matrix in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$H_g(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 - y - \frac{5}{2}x^2 + \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^4}{4} & -x - 2xy + xy^2 + \frac{x^3 y}{2} \\ -2xy - x + \frac{x^3}{2}y + xy^2 & -x^2 - 6y + x^2y^2 + 2y^3 \end{pmatrix}$$

Es gilt

- $H_g(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}}$ ist <u>indefinit</u>;
- $H_g(0,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}}$ ist positiv definit $\Rightarrow$ <u>str. lok. Min.</u> bei V_-;
- $H_g(\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix} e^{-\frac{7}{8}}$ ist negativ def $\Rightarrow$ <u>str. lok. Max</u> bei W_+,
- $H_g(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix} e^{-\frac{7}{8}}$ ist negativ def $\Rightarrow$ <u>str. lok. Max</u> bei W_-.

Wir müssen diese drei Extrema auf <u>Globalität</u> untersuchen. Es gilt, mit $r^2 = x^2 + y^2$,

$$|g(x,y)| \leq 2(1 + x^2 + y^2) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 2(1 + r^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

$$\xrightarrow[r^2 = x^2 + y^2 \to +\infty]{} 0, \quad \text{nach Ana I}.$$

Damit besitzt g $\overset{\text{mindestens}}{\text{ein}}$ <u>globales Minimum</u> und $\overset{\text{mindestens}}{\text{ein}}$ <u>globales Maximum</u> auf $\mathbb{R}^2$.
Da $\operatorname{grad} g$ in einem Minimum notwendigerweise verschwindet, muss das Minimum in V_- sein. Also ist V_- <u>striktes globales Minimum</u>. Wegen $g(W_+) = g(W_-)$,

nimmt g ihr globales Maximum in W_+ und in W_- an, g hat aber kein striktes globales Maximum.

Aufgabe 24 Als Komposition zweifach stetig partiell diffbarer Funktionen ist f zweifach stetig partiell diffbar. Damit gilt für $\mathbb{R}^3 \ni h \to 0$:

$$f((0,0,0)+h) = f(0,0,0) + \operatorname{grad} f(0,0,0) \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot H_f(0,0,0) \cdot h + o(|h|_2^2).$$

Es gilt $f(0,0,0) = 0$,

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (e^{3y+z} \cos x,\ 3e^{3y+z} \sin x,\ e^{3y+z} \sin x),$$

d.h. $\operatorname{grad} f(0,0,0) = (1,0,0)$,

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -e^{3y+z} \sin x & 3e^{3y+z} \cos x & e^{3y+z} \cos x \\ 3e^{3y+z} \cos x & 9e^{3y+z} \sin x & 3e^{3y+z} \sin x \\ e^{3y+z} \cos x & 3e^{3y+z} \sin x & e^{3y+z} \sin x \end{pmatrix},$$

d.h. $H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ferner, für $h = (h_1, h_2, h_3)$, $H_f(0,0,0) \cdot h = \begin{pmatrix} 3h_2 + h_3 \\ 3h_1 \\ h_1 \end{pmatrix}$,

$$h \cdot H_f(0,0,0) \cdot h = 3h_1h_2 + h_1h_3 + 3h_1h_2 + h_1h_3$$
$$= 6h_1h_2 + 2h_1h_3.$$

Die Taylor-Entwicklung zweiten Grades von f an $(0,0,0)$ lautet also

$$f(h) = h_1 + 3h_1h_2 + h_1h_3 + o(|h|_2^2),\ h \to 0.$$